Կ. ՍԱՂԱԹԵԼՅԱՆ

ՕՊՏԻՄԱԼԱՑՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ

ԵՎ

ԽԱՂԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

(ԴԱՍԱԽՈՍՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ)

ԵՐԵՎԱՆ – 2012

Բովանդակություն

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

ՈՐՈՇՈՒՄՆԵՐ ԸՆԴՈՒՆԵԼՈՒ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՄՈԴԵԼԸ

Որոշումներ ընդունելու պրոցեսները ընկած են յուրաքանչյուր նպատակային գործունեության հիմքում: Արտադրական և ոչ արտադրական ոլորտները՝ իրենց գործունեության բնույթով, ամենաբազմազան կազմակերպություններ են՝ <<մարդ-մեքենա>> տիպի բարդ համակարգեր, որոնց գործունեության արդյունավետությունը էապես կախված է ինչպես ստրատեգիական, այնպես էլ տակտիկական որոշումների որակից:

Լավագույն որոշումներ ընդունելու մաթեմատիկական մոդելները բազմազան են և կարող են էապես տարբերվել միմյանցից: Այդ պատճառով այդպիսի մոդելներ հետազոտող մաթեմատիկական տեսությունները նույնպես տարբեր են ինչպես խնդիրների դրվածքով, այնպես էլ կիրառվող մաթեմատիկական ապարատով: Հաճախ այդ բոլոր տեսությունները միավորվում են <<գործույթների հետազոտում>>, <<օպտիմալացման մեթոդներ>>, <<որոշումներ ընդունելու տեսություն>> անվանումների տակ:

Որոշումներ ընդունելու ընդհանուր մոդելը կարելի է ներկայացնել որպես $\left\langle X, \{\succ_\alpha\}_{\alpha\in \mathrm{A}} \right\rangle$ համակարգ, որտեղ X-ը կամայական բազմություն է, որը կոչվում է *բոլոր հնարավոր որոշումների բազմություն*, իսկ $\succ_\alpha$-ները կամայական բինար հարաբերություններ են, որոնք կոչվում են *նախընտրելիության*, կամ *գերադասելիության հարաբերություններ*: Եթե X բազմության որևէ x և y կետերի համար $x \succ_\alpha y$, ապա ասում են, որ x-ը գերադասելի է կամ նախընտրելի է y-ից ըստ α հայտանիշի:

Հիմնական խնդիրը, որը դրվում է այս մոդելում, հետևյալն է. գտնել X բազմության կետ կամ կետեր, որոնք լավագույնն են $\succ_\alpha$, $\alpha \in \mathrm{A}$ հարաբերությունների իմաստով: Այս խնդրի լուծումը տրոհվում է երեք մասի: Նախ պետք է սահմանվի, թե որ կետն ենք համարում լավագույն կամ օպտիմալ: Այդ սահմանումը անվանում են օպտիմալության սկզբունք և տարբեր մասնավոր դեպքերում այն կարող է տարբեր լինել:

Երկրորդ խնդիրը՝ օպտիմալության սկզբունքով սահմանված կետի գոյության հարցն է: Եվ վերջապես երրորդ խնդիրը այդ կետը գտնելու մեթոդների մշակումն է:

Այժմ դիտարկենք ընդհանուր խնդրի մասնավոր դեպքերը:

ա) Դիցուք X բազմությունը վերջավոր է, և այդ բազմության վրա տրված են վերջավոր թվով նախընտրելիության հարաբերություններ: Այս դեպքում խնդիրը կոչվում է խմբային ընտրության խնդիր: Խմբային ընտրության տեսությունը կիրառվում է այնպիսի իրադրություններում, երբ հարկավոր է անհատական կարծիքների հիման վրա կառուցել խմբային կարծիք, օրինակ, փորձագիտական գնահատականներ ստանալու խնդիրներում կամ ընտրական գործընթացների հետ կապված տարատեսակ քաղաքական խնդիրներում:

բ) Եթե X բազմության վրա տրված հարաբերությունը միակն է, այսինքն՝ խնդիրն ունի $\langle X, \succ \rangle$ տեսքը, ապա կարևոր նշանակություն ունի այն հարցը, թե գոյություն ունի՞ արդյո՞ք իրականարժեք $u(x)$ ֆունկցիա, այնպիսին, որ ցանկացած $x, y \in X$ համար՝

$$u(x) > u(y) \iff x \succ y:$$

Այդ ֆունկցիան անվանում են օգտավետության ֆունկցիա, իսկ տեսությունը, որը զբաղվում է այդ հարցերով՝ օգտավետության տեսություն:

գ) Այն դեպքում, երբ օգտավետության ֆունկցիան գոյություն ունի, ստանում ենք, այսպես կոչված, էքստրեմալ խնդիր՝ X բազմության մեջ լավագույն կետ գտնելու խնդիրը բերվում է

$$\max_{x \in X} u(x) \qquad (*)$$

գտնելու խնդրի: Մաթեմատիկական անալիզի դասընթացից հայտնի են այս խնդրի մասնավոր դեպքերը և լուծման մեթոդները: Դա մեկ կամ մի քանի փոփոխականի ածանցելի ֆունկցիաների էքստրեմալ արժեքներ գտնելու խնդիրներն են, որտեղ X-ը իրական առանցքի հատված է, կամ R^n-ի որևէ ուղղանկյուն բազմություն:

դ) Այն դեպքերում, երբ $u(x)$-ը n փոփոխականի ֆունկցիա է, իսկ X բազմությունը տրված է ոչ բացահայտ տեսքով՝

$$X = \left\{ x \in R^n : \ g_j(x) \geq 0, \ j = 1, \ldots, m \right\},$$

ապա (*) խնդիրը անվանում են մաթեմատիկական ծրագրման խնդիր:

ե) (*) խնդիրը կոչվում է վարիացիոն հաշվի խնդիր, եթե $u(x)$-ը ֆունկցիոնալ է, որոշված որևէ բանախյան տարածության վրա, մասնավորապես ենթադրվում է, որ $X \subseteq C^k\left(t_0, t_1\right)$: Եթե դրան ավելացնում են նաև դիֆերենցիալ հավասարումների տեսքի պայմաններ և սահմանափակումներ, ապա այն անվանում են օպտիմալ կառավարման խնդիր:

զ) Երբ X բազմությունը կամայական բազմություն է և տրված հարաբերությունների թիվը վերջավոր է, ապա խնդիրը կոչվում է բազմանպատակային օպտիմալացման խնդիր: Եթե յուրաքանչյուր հարաբերության համար գոյություն ունի օգտավետության ֆունկցիա, ապա այն անվանում են վեկտորական օպտիմալացման խնդիր:

է) Եվ վերջապես, այն դեպքերում, երբ X բազմությունը կամայական է և կամայական թվով հարաբերություններ են տրված, իսկ որոշումները ընդունվում են անորոշության կամ կոնֆլիկտի պայմաններում, այդ մոդելն անվանում են խաղ, իսկ տեսությունը՝ խաղերի տեսություն:

Սույն դասընթացում հակիրճ անդրադարձել ենք վերը նշված բոլոր տեսություններին:

ՕՊՏԻՄԱԼԱՑՄԱՆ ԴԱՍԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1.1: ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄ

Դիցուք X-ը նորմավորված տարածության ենթաբազմություն է և $f(x)$-ը այդ բազմության վրա որոշված իրականարժեք ֆունկցիա է: $f(x)$ ֆունկցիայի սուպրեմում կանվանենք այն M, թիվը, որը բավարարում է հետևյալ երկու պայմաններին.

1. $f(x) \le M, x \in X$:
2. Ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $x_\varepsilon \in X$,որ՝ $f(x_\varepsilon) > M - \varepsilon$:

$f(x)$ Ֆունկցիայի սուպրեմումը X բազմության վրա նշանակվում է՝ $\sup\limits_{x\in X} f(x)$: Այն դեպքում, եթե գոյություն ունի այնպիսի $x^0 \in X$ կետ, որ $f(x^0) = M$, ապա M թիվը անվանում են $f(x)$ *ֆունկցիայի մաքսիմում* կամ մեծագույն արժեք, նշանակում են $\max\limits_{x\in X} f(x)$ և ասում են, որ սուպրեմումը հասանելի է, կամ մաքսիմումը գոյություն ունի: Այն կետերը, որտեղ $f(x)$ ֆունկցիան հասնում է իր մեծագույն արժեքին, անվանում են մաքսիմումի կետեր, և այդ կետերի բազմությունը նշանակում $Arg\max\limits_{x\in X} f(x)$-ով՝

$$Arg\max_{x\in X} f(x) = \left\{x' \in X : f(x') = \max_{x\in X} f(x)\right\}:$$

Նմանապես $f(x)$ ֆունկցիայի *ինֆիմում* կանվանենք այն m թիվը, որը բավարարում է հետևյալ երկու պայմաններին.

1. $f(x) \ge m, x \in X$,
2. Ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $x_\varepsilon \in X$, որ՝ $f(x_\varepsilon) > m - \varepsilon$:

$f(x)$ ֆունկցիայի ինֆիմումը X բազմության վրա նշանակվում է՝ $\inf\limits_{x\in X} f(x)$: Այն դեպքում, եթե գոյություն ունի այնպիսի $x^0 \in X$ կետ, որ $f(x^0)=m$, ապա m թիվը անվանում են $f(x)$ *ֆունկցիայի մինիմում* կամ *փոքրագույն արժեք*, նշանակում են $\min\limits_{x\in X} f(x)$ և ասում են, որ ինֆիմումը հասանելի է, կամ մինիմումը գոյություն ունի: Այն կետերը, որտեղ $f(x)$ ֆունկցիան հասնում է իր նվազագույն արժեքին, անվանում են մինիմումի կետերը, և այդ կետերի բազմությունը նշանակում $Arg\min\limits_{x\in X} f(x)$-ով՝

$$Arg\min_{x\in X} f(x)=\left\{x'\in X : f(x')=\min_{x\in X} f(x)\right\}:$$

Հաճախ օգտագործվում է նաև ֆունկցիայի մաքսիմումի և մինիմումի ընդհանուր՝ *ֆունկցիայի էքստրեմում* անվանումը:

Մաթեմատիկական անալիզի դասընթացում սահմանվում է նաև *լոկալ էքստրեմումի* գաղափարը:

Ասում են, որ $x^0 \in X$ կետը $f(x)$ ֆունկցիայի լոկալ մաքսիմումի (մինիմումի) կետ է, եթե գոյություն ունի x^0 կետի I շրջակայք այնպես, որ բոլոր $x\in I$ համար

$$f(x)\le f(x^0) \quad \left(f(x)\ge f(x^0)\right):$$

Բերենք ֆունկցիայի էքստրեմումների վերաբերյալ մաթեմատիկական անալիզի դասընթացից հայտնի մի քանի արդյունքներ: Էքստրեմումների հասանելիության խնդիրը լուծվում է Վայերշտրասի հայտնի թեորեմով:

Թեորեմ 1.1.1: R^n տարածության փակ սահմանափակ (կոմպակտ) բազմության վրա որոշված անընդհատ ֆունկցիան հասնում է իր մեծագույն և փոքրագույն արժեքներին:

Հետևյալ թեորեմը օգնում է գտնելու ֆունկցիայի էքստրեմումները:

Թեորեմ 1.1.2: Դիցուք $f(x)$-ը $D\subseteq R^n$ տիրույթում որոշված ածանցելի ֆունկցիա է: Եթե $f(x)$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետը ֆունկցիայի D տիրույթի ներքին կետ է, ապա այդ կետում $f(x)$ ֆունկցիայի բոլոր մասնակի ածանցյալները պետք է հավասար լինեն 0-ի, այսինքն բավարարվեն հետևյալ հավասարումները՝

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=0, i=1,2,\ldots,n:$$

Այլ կերպ ասած, էքստրեմումի կետում (եթե այն ներքին կետ է) ֆունկցիայի գրադիենտը հավասար է 0-ի:

1.2. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՊԱՅՄԱՆԱԿԱՆ ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄ

Կիրառական բազմաթիվ խնդիրներում այն տիրույթը, որտեղ փնտրում ենք ֆունկցիայի էքստրեմումը, տրվում է ոչ բացահայտ տեսքով: Դիտարկենք դասական պայմանական էքստրեմումի խնդիրը. գտնել n–փոփոխականի $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ ֆունկցիայի մաքսիմումը կամ մինիմումը $D \subseteq R^n$ տիրույթում, որը տրված է հետևյալ հավասարումների համակարգի տեսքով՝

$$
\begin{aligned}
&g_1\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = b_1, \\
&g_2\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = b_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&g_m\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = b_m :
\end{aligned}
$$

Այս հավասարումներն անվանում են *կապի հավասարումներ*: Դիցուք $m < n$ և գոյություն ունի այնպիսի $x^0 \in D$ կետ, որ՝

$$f\left(x^0\right) = \max_{x \in D} f\left(x\right):$$

Ենթադրենք նաև, որ $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ և $g_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right), i = 1, 2, ..., m$ ֆունկցիաները ունեն անընդհատ մասնակի ածանցյալներ ըստ բոլոր փոփոխականների, և x^0 կետում $g_i, i = 1, 2, ..., m$ ֆունկցիաների՝

$$
J = \begin{pmatrix}
\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & . \; . \; . & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\
\frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & . \; . \; . & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\
. & . & . \; . \; . \; . & . \\
. & . & . \; . \; . \; . & . \\
\frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & . \; . \; . & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}
\end{pmatrix}
$$

յակոբիանի ռանգը հավասար է m–ի: Դիցուք $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ թվերը կամայական հաստատուններ են: Կազմենք այս խնդրի $L\left(x, \lambda\right)$ Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x):$$

$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ հաստատունները անվանում են անորոշ փոփոխականներ, կամ Լագրանժի գործակիցներ: Բերենք պայմանական էքստրեմումի խնդրի լուծման Լագրանժի եղանակը:

Լագրանժի անորոշ գործակիցների եղանակ: *Դիցուք տրված է պայմանական էքստրեմումի խնդիր՝ գտնել*

$$\max_{x \in D} f(x), \; D = \left\{ x \in R^n : g_i(x) = b_i, i = 1, 2, ..., m \right\},$$

որտեղ բոլոր ֆունկցիաները բավարարում են վերը նշված պայմաններին և $f(x)$ ֆունկցիան իր էքստրեմալ արժեքին հասնում է D տիրույթի ներքին x^0 կետում: Այս դեպքում գոյություն ունեն այնպիսի $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ հաստատուններ, որ էքստրեմումի x^0 կետում բավարարվում են հետևյալ հավասարումները՝

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_i} = 0, \; i = 1, 2, ..., n:$$

Այսպիսով, Լագրանժի անորոշ գործակիցների եղանակը թույլ է տալիս պայմանական էքստրեմումի խնդիրը բերել ոչ պայմանական էքստրեմումի խնդրին, սակայն $L(x,\lambda)$ ֆունկցիայի նկատմամբ:

Բերենք այս եղանակի հիմնավորումը երկու փոփոխականի և մեկ կապի հավասարման դեպքում: Ենթադրենք հարկավոր է գտնել $f(x,y)$ ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումը $g(x,y) = 0$ կապի դեպքում: Դիցուք լոկալ էքստրեմումի կետը (x^0, y^0)–ն է: Յակոբիանի ռանգի վերաբերյալ պայմանը կվերածվի $g'_x \neq 0$ կամ $g'_y \neq 0$ պայմանների: Դիցուք (x^0, y^0) կետում $g'_y \neq 0$: Հետևաբար, ոչ բացահայտ ֆունկցիաների վերաբերյալ հայտնի թեորեմի համաձայն, կարելի է $g(x,y) = 0$ հավասարումից (x^0, y^0) կետի որևէ շրջակայքում y-ը արտահայտել որպես ֆունկցիա x-ից՝ $y = \varphi(x)$, ընդորում՝ $y^0 = \varphi(x^0)$: Տեղադրելով նույն հավասարման մեջ, կստանանք նույնություն՝ $g(x, \varphi(x)) \equiv 0$: Այստեղից,՝

$$\frac{dg}{dx}=\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\varphi'_x=0,\ \ \varphi'_x=-\frac{\partial g}{\partial x}:\frac{\partial g}{\partial y}:$$

Տեղադրելով $f(x,y)$ ֆուկցիայի մեջ $y=\varphi(x)$, կստանանք՝ $f(x,\varphi(x))$:

Քանի որ $y^0=\varphi(x^0)$, և (x^0,y^0)-ն $f(x,y)$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ է, ուստի այդ կետում՝

$$\frac{df}{dx}=0,\ \ \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\varphi'_x=0:$$

Այստեղից՝

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}:\frac{\partial g}{\partial y}\right)=0:$$

Եթե այժմ նշանակենք՝

$$\frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}:\frac{\partial g}{\partial y}=-\lambda,$$

ապա վերջնականապես,(x^0,y^0) կետում, կստանանք՝

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial g}{\partial y}=0:$$

Կամ՝

$$L'_x(x^0,y^0)=0,\ \ L'_y(x^0,y^0)=0:$$

1.3: ՎԱՐԻԱՑԻՈՆ ՀԱՇԻՎ

Դիտարկենք մի քանի օրինակ, որոնք կարող են պատկերացում տալ վարիացիոն հաշվում ուսումնասիրվող խնդիրների մասին: Ինչպես գիտենք, հարթության երկու՝ $A(x_0, y_0)$ և $B(x_1, y_1)$ կետերը միացնող $y(x)$ կորի երկարությունը (եթե ունի անընդհատ ածանցյալ) տրվում է $l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx$ բանաձևով: Փոփոխելով $y(x)$ կորը մենք կստանանք կորի երկարության տարբեր արժեքներ, այսինքն կորի երկարությունը ֆունկցիա է կորից՝ $l = l(y(x))$: Հայտնի խնդիր է՝ գտնել տրված $A(x_0, y_0)$ և $B(x_1, y_1)$ կետերը միացնող այն կորը, որի երկարությունը ամենակարճն է: Այս խնդիրը կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ. Գտնել

$$\min_{y \in C^1[x_0, x_1]} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx:$$

Դիտարկենք մեկ այլ խնդիր: Դիցուք փոփոխական խտությամբ թափանցիկ միջավայրում տրված են $A(x_0, y_0, z_0)$ և $B(x_1, y_1, z_1)$ կետերը: Հարկավոր է որոշել A կետից B կետ անցնող լույսի ճառագայթի հետագիծը: Ըստ Ֆերմայի հայտնի սկզբունքի, լույսի ճառագայթը միշտ շարժվում է ամենաարագ հետագծով: Դիցուք (x, y, z) կետում լույսի արագությունը $v(x, y, z)$ է: Ճանապարհի ds հատվածը լույսը կանցնի $t = \frac{ds}{v}$ ժամանակում: Եթե x փոփոխականը ընդունենք որպես պարամետր, լույսի որոնելի հետագծի հավասարումը կարելի է դիտարկել $(y(x), z(x))$-տեսքով, և ժամանակի համար կստանանք հետևյալ բանաձևը՝

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v(x, y, z)}\,dx:$$

Խնդիրը բերվում է հետևյալին: Հարկավոր է գտնել այնպիսի $y(x), z(x)$ ֆունկցիաներ, որ T-ն ունենա փոքրագույն արժեք, ընդ որում $y(x)$ և $z(x)$ ֆունկցիաները պետք է բավարարեն հետևյալ եզրային պայմաններին՝

$$y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0, y(x_1) = y_1, z(x_1) = z_1:$$

Մեզ հասած պատմական տվյալների համաձայն, վարիացիոն հաշվի առաջին խնդիրը լուծվել է մոտավորապես 850-ական մ.թ.ա. թվականներին Դիդո (Դիդոնա, Էլիսսա) թագուհու կողմից: Երբ Տյուրոսի թագավորը մահանում է, թագավորությունը անցնում է իր զավակներին՝ որդի Պիգմալիոնին և դուստր Դիդոյին: Սակայն ցանկանալով միանձնյա կառավարել երկիրը, Պիգմալիոնը սպանում է Դիդոյի ամուսնուն: Դիդոն, հավաքելով իր ունեցվածքը, հավատարիմ ազնվականների հետ դիմում է փախուստի և մի առ ժամանակ հետո հասնում Աֆրիկայի հյուսիսային ափերը (այժմյան Թունիս): Այստեղ տեղի բերբերների թագավորից նա մի կտոր հողատարածք է խնդրում բնակվելու համար, սակայն թագավորը համաձայնվում է տալ այնքան հող, որքան կտեղավորվի ցուլի մորթու մեջ: Դիդոն համաձայնվում է, ընտրում ցուլին, ապա ցուլի կաշուց կտրում նեղ ժապավեններ և, միացնելով միմիանց, ստանում 2,5 մղոն երկարությամբ պարան, որով և անջատում է օվկյանոսի ափից իր հողատարածքը: Հետագայում այդ տարածքում հիմնվեց Կարթագեն պետությունը, որի առաջին թագուհին Դիդոն էր: Դիդոն ոչ միայն հնարամիտ էր, այլ նաև շատ գեղեցիկ և բազմաթիվ պոետներ, երաժիշտներ և նկարիչներ, սկսած Վերգիլիուսից և Պուչինիից անդրադարձել են Դիդոյի կյանքի պատմությանը: Ֆորմալ տեսանկյունից Դիդոյի խնդիրը կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ. գտնել իրական առանցքի a և b կետերը միացնող հաստատուն l երկարություն ունեցող այնպիսի $y(x)$ կոր, որ իրական առանցքով և կորով սահմանափակված պատկերի մակերեսը լինի մեծագույն: Այսպիսով, կգանք հետևյալ խնդրին՝ գտնել

$$J[y]=\int_a^b y(x)\,dx$$

ֆունկցիոնալի մաքսիմումը, եթե $y(x)$-ն բավարարում է

$$\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx=l,\quad y(a)=y(b)=0$$

պայմանին:

Ընդհանուր դեպքում, դիցուք X-ը ֆունկցիոնալ տարածություն է և $J(x)$-ը ինտեգրալային ֆունկցիոնալ է, որոշված այդ տարածության վրա: Այստեղ կդիտարկվեն միայն $C[t_0,t_1]$ և $C^k[t_0,t_1]$ տեսքի ֆունկցիոնալ տարածություններ, որտեղ $[t_0,t_1]$-ը իրական առանցքի որևէ հատված է:

Ֆունկցիոնալի լոկալ էքստրեմումի կետը սահմանվում է այնպես, ինչպես և ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի դեպքում՝ $x^0(t)$-ն $J(x)$ ֆունկցիոնալի լոկալ մաքսիմումի (մինիմումի) կետ է, եթե գոյություն ունի $x^0(t)$-ի I շրջակայք (համապատասխան տարածության նորմով), որ բոլոր $x(t)\in I$ համար տեղի ունի

$$J\left(x^0\right)\geq J(x),\ \left(J\left(x^0\right)\leq J(x)\right)$$

անհավասարությունը:

Լեմ 1.3.1: (Լագրանժ): Եթե $f(t)\in C[t_0,t_1]$ *և* $\eta(t)\in C^1[t_0,t_1]$, $\eta(t_0)=0,\eta(t_1)=0$ *պայմանին բավարարող բոլոր ֆունկցիաների համար*

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)\eta(t)\,dt=0,$$

ապա $f(t)\equiv 0,\ t\in[t_0,t_1]$:

Ապացույց. Ենթադրենք, որ լեմի պնդումը սխալ է և գոյություն ունի $\tau\in[t_0,t_1]$, որ $f(\tau)\neq 0,$ մասնավորապես $f(\tau)>0$: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ τ–ն $[t_0,t_1]$ բազմության ներքին կետ է: Քանի որ $f(t)$ ֆունկցիան անընդհատ է, ուստի գոյություն ունի (τ_1,τ_2) միջակայք, որտեղ $f(t)>0$: (Եթե այն գտնվի ծայրակետում, օրինակ $\tau=t_1$, ապա $f(t)$ ֆունկցիայի անընդհատությունից կհետևի, որ գոյություն ունի $(t',t_1]$ միջակայք, որտեղ $f(t)>0$: Այս դեպքում որպես τ կետ կվերցնենք այդ միջակայքի կամայական ներքին կետ): Կառուցենք $\eta(t)$ ֆունկցիան հետևյալ կերպ՝

$$\eta(t)=\begin{cases}(t-\tau_1)^2(t-\tau_2)^2,\ t\in(\tau_1,\tau_2),\\ 0, \qquad\qquad\qquad t\notin(\tau_1,\tau_2):\end{cases}$$

Այսպես կառուցված ֆունկցիան բավարարում է լեմի պայմաններին՝ $\eta(t)\in C^1[t_0,t_1]$, $\eta(t_0)=0,\eta(t_1)=0$: Հաշվի առնելով, որ $\eta(t)$-ն նույնաբար զրո է (τ_1,τ_2) միջակայքից դուրս,

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)\eta(t)\,dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)(t-\tau_1)^2(t-\tau_2)^2\,dt:$$

Սակայն այս ինտեգրալը խիստ դրական է, քանի որ (τ_1, τ_2) միջակայքում խիստ դրական է $f(t)$-ն: Ստացված հակասությունը ապացուցում է լեմի պնդումը:

Նկատենք, որ այս լեմի պնդումը մնում է ուժի մեջ, եթե $\eta(t)$ ֆունկցիայի վրա դրվեն ավելի խիստ պայմաններ, օրինակ պահանջենք մինչև որևէ n կարգի անընդհատ ածանցյալների գոյությունը:

Դիցուք տրված է ինտեգրալային ֆունկցիոնալ՝

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})\,dt,$$

որտեղ $L(t, x, \dot{x})$ ֆունկցիան անընդհատ է որպես երեք փոփոխականի ֆունկցիա, և ունի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ: Այստեղ $\dot{x}(t)$-ով նշանակված է $x(t)$ ֆունկցիայի ածանցյալը: $J[x]$ ֆունկցիոնալի լոկալ էքստրեմումը փնտրում ենք $C^1[t_0, t_1]$ ֆունկցիաների դասում:

Կասենք, որ $x^0(t)$ ֆունկցիան $J[x]$ ֆունկցիոնալի էքստրեմումի կետ է, եթե գոյություն ունի $\varepsilon > 0$, այնպես, որ՝

$$J[x^0] \geq J[x], \; \|x^o - x\|_{C^1} < \varepsilon,$$

կամ՝

$$J[x^0] \leq J[x], \quad \|x^o - x\|_{C^1} < \varepsilon:$$

Տարբեր խնդիրներում կարող են պահանջվել նաև ավելի բարձր կարգի ածանցյալների, կամ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալների գոյության կամ անընդհատության պայմաններ: Քանի որ այս դասընթացում մեր նպատակը վարիացիոն հաշվի ամբողջական և խիստ մաթեմատիկական տեսություն շարադրելը չէ (դրանց հետ կարելի է ծանոթանալ, օրինակ մասնագիտական [1] և [25] գրականությունից), այլ միայն ծանոթացնել այս տեսության սկզբունքների և մոտեցումների հետ, ուստի հետագայում կենթադրենք, որ բոլոր հանդիպող ֆունկցիաները ունեն այնքան անընդհատ ածանցյալներ, որքան պահանջվի:

Վարիացիոն հաշվի պարզագույն խնդիրը: Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը: Գտնել

$$\underset{x\in K}{extr}\int_{t_0}^{t_1} L\left(t,x,\dot{x}\right)dt,$$

որտեղ $K=\left\{x\in C^1\left[t_0,t_1\right],\ x\left(t_0\right)=x_0,\ x\left(t_1\right)=x_1\right\}$:

Դիցուք այս խնդրի լուծումը՝ $x(t)$-ն գոյություն ունի: Վերցնենք կամայական $\eta(t)\in C^1\left[t_0,t_1\right]$ ֆունկցիա, որը ծայրակետերում հավասար է զրոյի՝ $\eta(t_0)=\eta(t_1)=0$, և կազմենք նոր ֆունկցիա՝ $x(t)+\alpha\eta(t)$, որտեղ α-ն բավականաչափ փոքր իրական թիվ է: Այս նոր ֆունկցիան բավարարում է նույն եզրային պայմաններին, ինչ և $x(t)$ ֆունկցիան, այսինքն $x(t)+\alpha\eta(t)\in K$: Տեղադրելով J ֆունկցիոնալի մեջ, կստանանք α-ից կախված ֆունկցիա ($x(t)$ և $\eta(t)$ ֆունկցիաները ֆիքսված են)՝

$$J\left(\alpha\right)=\int_{t_0}^{t_1} L\left(t,x+\alpha\eta,\dot{x}+\alpha\dot{\eta}\right)dt:$$

Ցանկացած տրված $\varepsilon>0$ թվի համար $x(t)+\alpha\eta(t)$ ֆունկցիան կգտնվի $x(t)$ ֆունկցիայի ε շրջակայքում 0-ին մոտ բավականաչափ փոքր α-ի համար: Քանի որ $x(t)$-ն ենթադրվել է $J[x]$ ֆունկցիոնալի լոկալ էքստրեմումի կետ, ուստի $J\left(\alpha\right)$ ֆունկցիան պետք է ունենա լոկալ էքստրեմում $\alpha=0$ դեպքում, հետևաբար $\alpha=0$ կետում ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է 0-ի: Ածանցելով ըստ α-ի, կստանանք՝

$$J'\left(\alpha\right)|_{\alpha=0}=\int_{t_0}^{t_1}\left[L_x\left(t,x,\dot{x}\right)\eta\left(t\right)+L_{\dot{x}}\left(t,x,\dot{x}\right)\dot{\eta}\left(t\right)\right]dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1} L_x\left(t,x,\dot{x}\right)\eta\left(t\right)+\int_{t_0}^{t_1} L_{\dot{x}}\left(t,x,\dot{x}\right)\dot{\eta}\left(t\right)dt:$$

Մասերով ինտեգրելով երկրորդ գումարելին, կստանանք՝

$$J'(\alpha)|_{\alpha=0}=\int_{t_0}^{t_1}\left[L_x(t,x,\dot{x})-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\right]\eta(t)\,dt+L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\eta(t)|_{t=t_1}-L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\eta(t)|_{t=t_0}: \qquad (1.3.1)$$

Ոչ ինտեգրալային գումարելիները հավասար են 0-ի, քանի որ $\eta(t_0)=\eta(t_1)=0$, հետևաբար՝

$$J'(\alpha)|_{\alpha=0}=\int_{t_0}^{t_1}\left[L_x(t,x,\dot{x})-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\right]\eta(t)\,dt: \qquad (1.3.2)$$

Կիրառելով Լագրանժի լեմը, ստանում ենք, որ եթե գոյություն ունի $J[x]$ ֆունկցիոնալի լոկալ էքստրեմումի $x(t)$ ֆունկցիա, ապա այն պետք է բավարարի հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարմանը՝

$$L_x(t,x,\dot{x})-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})=0: \qquad (1.3.3)$$

Ֆունկցիայի դիֆերենցիալի նմանությամբ, $\delta J=J'(0)\alpha$ արտահայտությունն ($J(\alpha)$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը $\alpha=0$ կետում) անվանում են $J[x]$ ֆունկցիոնալի վարիացիա: Այս (1.3.3) հավասարումն անվանում են Էյլերի հավասարում, իսկ հավասարմանը բավարարող $x(t)$ ֆունկցիաները՝ *էքստրեմալներ*:

Այժմ ենթադրենք, որ ենթաինտեգրալային ֆունկցիան կախված է երկու՝ $x(t)$ և $y(t)$ ֆունկցիաներից, այսինքն J ֆունկցիոնալը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$J[x,y]=\int_{t_0}^{t_1}L(t,x,y,\dot{x},\dot{y})\,dt:$$

Դիտարկենք վարիացիոն հաշվի հետևյալ խնդիրը՝

$$\underset{(x,y)\in K}{extr}\,J[x,y]$$

$$K=\left\{(x,y)\in C^1[t_0,t_1]\times C^1[t_0,t_1],x(t_0)=x_0,x(t_1)=x_1;y(t_0)=y_0,y(t_1)=y_1\right\}:$$

Նորից կենթադրենք, որ $J[x, y]$-ի էքստրեմումը գոյություն ունի, $(x(t),\ y(t))$-ն դրա էքստրեմումի կետն է, և $L(t,x,y,\dot{x},\dot{y})$ ֆունկցիան բավարարում է ածանցելիության բոլոր անհրաժեշտ պայմաններին: Ինչպես և նախորդ խնդրում, դիցուք $\eta_1(t)\in C^1[t_0,t_1], \eta_2(t)\in C^1[t_0,t_1]$, $\eta_1(t_0)=\eta_1(t_1)=0$, $\eta_2(t_0)=\eta_2(t_1)=0$ կամայական ֆունկցիաներ են, α_1,α_2-ը բավականաչափ փոքր իրական թվեր: Ֆունկցիաներին տանք աճ՝ $x(t)+\alpha_1\eta_1(t), y(t)+\alpha_2\eta_2(t)$, և դիտարկենք՝

$$J(\alpha_1,\alpha_2)=\int_{t_0}^{t_1} L(t,x+\alpha_1\eta_1,y+\alpha_2\eta_2,\dot{x}+\alpha_1\dot{\eta}_1,\dot{y}+\alpha_2\dot{\eta}_2)\,dt:$$

Այս դեպքում նույպես $J(\alpha_1,\alpha_2)$ ֆունկցիայի էքստրեմումը պետք է բավարարի Էքստրեմումի գոյության անհրաժեշտ պայմանին՝

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_1}\Big|_{\substack{\alpha_1=0\\ \alpha_2=0}}=0,$$
$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_2}\Big|_{\substack{\alpha_1=0\\ \alpha_2=0}}=0:$$

Գտնենք $J(\alpha_1,\alpha_2)$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները ըստ α_1 և α_2-ի: Արդյունքում կստանանք՝

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_1}\Big|_{\substack{\alpha_1=0\\ \alpha_2=0}}=\int_{t_0}^{t_1}\left[L_x(t,x,y,\dot{x},\dot{y})-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t,x,y,\dot{x},\dot{y})\right]\eta_1(t)\,dt=0,$$
$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_2}\Big|_{\substack{\alpha_1=0\\ \alpha_2=0}}=\int_{t_0}^{t_1}\left[L_y(t,x,y,\dot{x},\dot{y})-\frac{d}{dt}L_{\dot{y}}(t,x,y,\dot{x},\dot{y})\right]\eta_2(t)\,dt=0:$$

Այստեղից, կիրառելով Լագրանժի լեմը, կստանանք՝

$$L_x(t,x,y,\dot{x},\dot{y})-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t,x,y,\dot{x},\dot{y})=0,$$
$$L_y(t,x,y,\dot{x},\dot{y})-\frac{d}{dt}L_{\dot{y}}(t,x,y,\dot{x},\dot{y})=0:$$

Ընդհանուր, n հատ $x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)$ ֆունկցիաների դեպքում, ստանում ենք հետևյալ անհրաժեշտ պայմանները՝

$$L_{x_i} - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}_i} = 0, i = 1, 2, ..., n:$$

Ենթաինտեգրալային L ֆունկցիան կարող է կախված լինել նաև բարձր կարգի ածանցյալներից: Պարզության համար դիտարկենք հետևյալ խնդիրը՝ գտնել

$$\underset{x \in K}{extr}\, J[x] = \underset{x \in K}{extr} \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x}, \ddot{x})\, dt,$$

եթե $K = \{x \in C^2[t_0, t_1], x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1; \dot{x}(t_0) = x_2, \dot{x}(t_1) = x_3\}$: Նորից, ենթադրելով, որ $x(t)$ ֆունկցիան $J[x]$ ֆունկցիոնալի էքստրեմումի կետն է, տանք աճ՝ $x(t) + \alpha\eta(t)$, որտեղ $\eta(t) \in C^2[t_0, t_1]$ նորից կամայական է և բավարարում է եզրային $\eta(t_0) = \eta(t_1) = \dot{\eta}(t_0) = \dot{\eta}(t_1) = 0$ պայմաններին, α-ն 0-ին մոտ թիվ է: Տեղադրելով ֆունկցիոնալի մեջ, կստանանք՝

$$J(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x + \alpha\eta, \dot{x} + \alpha\dot{\eta}, \dot{x} + \alpha_1\dot{\eta}_1, \ddot{x} + \alpha\ddot{\eta})\, dt:$$

Այս ֆունկցիայի ածանցյալը ըստ α-ի 0 կետում հավասար է՝

$$J'(\alpha)|_{\alpha=0} = \int_{t_0}^{t_1} \left[L_x(t, x, \dot{x}, \ddot{x})\eta(t) + L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}, \ddot{x})\dot{\eta}(t) + L_{\ddot{x}}(t, x, \dot{x}, \ddot{x})\ddot{\eta}(t) \right] dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[L_x(t, x, \dot{x}, \ddot{x})\eta(t) + L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}, \ddot{x})\dot{\eta}(t) \right] dt + \int_{t_0}^{t_1} L_{\ddot{x}}(t, x, \dot{x}, \ddot{x})\ddot{\eta}(t)\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[L_x(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) \right] \eta(t)\, dt + \int_{t_0}^{t_1} L_{\ddot{x}}(t, x, \dot{x}, \ddot{x})\ddot{\eta}(t)\, dt:$$

Երկու անգամ մասերով ինտեգրելով երկրորդ գումարելին, ստանում ենք՝

$$\int_{t_0}^{t_1} L_{\ddot{x}}(t, x, \dot{x}, \ddot{x})\ddot{\eta}(t)\, dt = \frac{d}{dt} L_{\ddot{x}}(t, x, \dot{x}, \ddot{x})\dot{\eta}(t)|_{t_0}^{t_1} - L_{\ddot{x}}(t, x, \dot{x}, \ddot{x})\eta(t)|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d^2}{dt^2} L_{\ddot{x}}(t, x, \dot{x}, \ddot{x})\eta(t)\, dt:$$

Այսպիսով, քանի որ $\eta(t_0) = \eta(t_1) = \dot{\eta}(t_0) = \dot{\eta}(t_1) = 0$, ուստի՝

$$J'(\alpha)|_{\alpha=0}=\int_{t_0}^{t_1}\left[L_x(t,x,\dot{x},\ddot{x})-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x},\ddot{x})+\frac{d^2}{dt^2}L_{\ddot{x}}(t,x,\dot{x},\ddot{x})\right]\eta(t)\,dt$$

Այստեղից, օգտվելով Լագրանժի լեմից, ստանում ենք Էյլերի հավասարումը երկրորդ կարգի ածանցյալով խնդրի համար՝

$$L_x(t,x,\dot{x},\ddot{x})-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x},\ddot{x})+\frac{d^2}{dt^2}L_{\ddot{x}}(t,x,\dot{x},\ddot{x})=0\text{:}$$

Ընդհանուր դեպքում, եթե L ֆունկցիան կախված է մինչև n-րդ կարգի ածանցյալներից, Էյլերի բանաձևը կընդունի

$$\sum_{k=0}^{n}\left(-1^k\right)\frac{d^k}{dt^k}L_{x^{(k)}}=0$$

տեսքը:

Իզոպերիմետրիկ խնդիր: Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը: Բոլոր $x(t)\in C^1[t_0,t_1]$ կորերի բազմության մեջ, որոնք միացնում են (t_0,x_0) և (t_1,x_1) կետերը և որոնց համար տրված է

$$\tilde{J}[x]=\int_{t_0}^{t_1}\tilde{L}(t,x,\dot{x})\,dt$$

Ֆունկցիոնալի արժեքը, գտնել այն $x(t)$ ֆունկցիան, որի դեպքում

$$J[x]=\int_{t_0}^{t_1}L(t,x,\dot{x})\,dt$$

ֆունկցիոնալը կստանա էքստրեմալ արժեք: Այսպիսի խնդիրները անվանում են *իզոպերիմետրիկ* “ի պատիվ” Դիդո թագուհու: Ֆունկցիաների անընդհատության և ածանցելիության վերաբերյալ անհրաժեշտ պայմանների դեպքում այս խնդիրը բերվում է վարիացիոն հաշվի պարզագույն խնդրին հետևյալ թեորեմի օգնությամբ:

Թեորեմ 1.3.1: *Եթե գոյություն ունի իզոպերիմետրիկ խնդրի* $x(t)$ *լուծում և եթե* $x(t)$ *-ն* $\tilde{J}[x]$ *ֆունկցիոնալի էքստրեմալը չէ, ապա գոյություն ունի այնպիսի* λ *հաստատուն, որ* $x(t)$ *-ն*

$$J^0[x]=\int_{t_0}^{t_1} H(t,x,\dot{x})\,dt$$

ֆունկցիոնալի էքստրեմալն է, որտեղ $H=L+\lambda\tilde{L}$ *:*

Բոլցի խնդիր: Նախորդ բոլոր խնդիրներում ենթադրվում էր, որ $x(t)$ ֆունկցիան ամրացված է ծայրակետերում՝ $x(t)$ ֆունկցիայի արժեքները $[t_0,t_1]$ հատվածի ծայրակետերում նախապես տրված են: Այժմ դիտարկենք պարզագույն խնդիրը, հանելով այդ պայմանը, այսինքն՝ գտնել

$$extrJ[x]=extr\int_{t_0}^{t_1} L(t,x,\dot{x})\,dt$$

բոլոր $x(t)\in C^1[t_0,t_1]$ ֆունկցիաների բազմության վրա: Այս խնդիրը կանվանենք *ազատ եզրերով խնդիր*: Նորից աճ տալով $x(t)$-ին՝ $x(t)+\alpha\eta(t)$, որտեղ $\eta\in C^1[t_0,t_1]$ կամայական է, և ածանցելով $J(\alpha)$-ն, կստանանք (1.3.1) արտահայտությունը՝

$$J'(\alpha)|_{\alpha=0}=\int_{t_0}^{t_1}\left[L_x(t,x,\dot{x})-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\right]\eta(t)\,dt+L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\eta(t)|_{t=t_1}-L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\eta(t)|_{t=t_0}:$$

Սակայն այստեղ, ի տարբերություն պարզագույն խնդրի, չենք պահանջել, որ $\eta(t_0)=0,\eta(t_1)=0$: Ակնհայտ է, որ եթե $x(t)$-ն էքստրեմալ է ազատ եզրերով խնդրում, ապա այն էքստրեմալ է նաև ամրացված ծայրերով խնդրում և, հետևաբար՝

$$L_x(t,x,\dot{x})-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})=0\Rightarrow\int_{t_0}^{t_1}\left[L_x(t,x,\dot{x})-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\right]\eta(t)\,dt=0:$$

Եվ քանի որ $\eta(t_0)$-ն և $\eta(t_1)$-ը միմյանցից անկախ կամայական թվեր են, ուստի ստանում ենք երկու լրացուցիչ եզրային պայման՝

$$L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})|_{t=t_0}=0,$$
$$L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})|_{t=t_1}=0:$$

Որոշ դեպքերում պահանջվում է դիտարկել նաև հետևյալ տեսքի ֆունկցիոնալներ՝

$$J[x]=\int_{t_0}^{t_1}L(t,x,\dot{x})dt+\varphi(x(t_0))+\psi(x(t_1)),$$

որտեղ $\varphi(x)$-ն և $\psi(x)$-ն անընդհատ ածանցելի ֆունկցիաներ են: Այս տեսքով տրված խնդիրն անվանում են *Բոլցի խնդիր*: Կրկնելով վերը բերված բոլոր դատողությունները, $J'(\alpha)$ - համար կստանանք՝

$$J'(\alpha)|_{\alpha=0}=\int_{t_0}^{t_1}\left[L_x(t,x,\dot{x})-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\right]\eta(t)dt+$$
$$+L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\eta(t)|_{t=t_1}-L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\eta(t)|_{t=t_0}+\varphi_x(x(t_0))\eta(t_0)+\psi_x(x(t_1))\eta(t_1)=0:$$

Այստեղ նորից, քանի որ $x(t)$-ն էքստրեմալ է, ապա ինտեգրալը հավասար է 0-ի և նախորդ արտահայտությունը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$J'(\alpha)|_{\alpha=0}=L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\eta(t)|_{t=t_1}-L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\eta(t)|_{t=t_0}+\varphi_x(x(t_0))\eta(t_0)+\psi_x(x(t_1))\eta(t_1)=0$$

կամ

$$\left(-L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})|_{t_0}+\varphi_x(x(t_0))\right)\eta(t_0)+\left(L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})|_{t_1}+\psi_x(x(t_1))\right)\eta(t_1)=0:$$

Հաշվի առնելով, որ $\eta(t_0),\eta(t_1)$ արժեքները կամայական են, ստանում ենք Բոլցի խնդրի եզրային պայմանները՝

$$L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})|_{t_0}=\varphi_x(x(t_1)),$$
$$-L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})|_{t_1}=\psi_x(x(t_0)):$$

ՈՒՌՈՒՑԻԿ ԱՆԱԼԻԶԻ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐ

2.1 ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄՆԵՐ, ԱՆՋԱՏԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ԹԵՈՐԵՄ

Այս պարագրաֆում բերված են ուռուցիկ անալիզի հիմնական հասկացությունները և արդյունքները, որոնք հետագայում պահանջվելու են վերջավոր չափանի օպտիմացման խնդիրների հետազոտման ընթացքում:

Դիցուք R^n-ը n-չափանի էվկլիդեսյան տարածությունն է: Հիշեցնենք, որ R^n-ում $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ վեկտորի նորմը սահմանվում է հետևյալ կերպ՝ $\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$: Երկու՝ $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ և $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ վեկտորների $\langle x,y\rangle$ սկալյար արտադրյալը սահմանվում է այսպես՝ $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$, իսկ $\rho(x,y)$ հեռավորությունը՝

$$\rho(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} :$$

Սահմանում 2.1.1: $X\subseteq R^n$ բազմությունը անվանում են *ուռուցիկ բազմություն*, եթե իր ցանկացած երկու՝ x' և x'' կետերի հետ մեկտեղ այն պարունակում է նաև

$$x=\alpha x'+(1-\alpha)x'' \tag{2.1.1}$$

տեսքի բոլոր կետերը, որտեղ $0\le\alpha\le1$:

Երկրաչափորեն դա նշանակում է, որ իր ցանկացած երկու կետերի հետ մեկտեղ այն պարունակում է նաև այդ կետերը միացնող հատվածը: R^n-ում հենց (2.1.1) հավասարմանը բավարարող բոլոր x կետերի բազմությունն են անվանում x' և x'' կետերը միացնող հատված: Ուռուցիկ բազմության օրինակներ են՝ գունդը, ուղղանկյունը, ուղիղը, հարթությունը, R^n տարածության դրական օկտանտը (R_+^n) և այլն:

Թվարկենք ուռուցիկ բազմությունների մի քանի պարզ հատկություններ:

Հ.1: Ուռուցիկ բազմությունների հատումն ուռուցիկ է:

Ապացույց. Դիցուք $X = X_1 \bigcap X_2$, որտեղ X_1-ն ու X_2-ը ուռուցիկ բազմություններ են: Վերցնենք երկու կամայական x_1 և x_2 կետեր X-ից: Քանի որ $X \subseteq X_1, X \subseteq X_2$, ապա ցանկացած $\alpha \in [0,1]$ թվի համար $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in X_1$, $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in X_2$, հետևաբար, նաև՝ $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in X$: Նույն եղանակով այս պնդումը կարելի է տարածել ցանկացած թվով ուռուցիկ բազմությունների հատման համար:

Հ.2: Ուռուցիկ X բազմության կամայական վերջավոր թվով $x^1, x^2, ..., x^k$ կետերի՝

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i$$

ուռուցիկ գծային կոմբինացիաները պատկանում են X-ին ցանկացած

$$\alpha_i \geq 0,\ i = 1,...,k,\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$$

գործակիցների համար:

Ապացույց. Ապացուցենք ինդուկցիայի եղանակով ըստ կետերի քանակի՝ k թվի: $k = 2$ դեպքում մեր պնդումը համընկնում է ուռուցիկ բազմության սահմանման հետ: Այժմ ենթադրենք, որ X բազմության $k-1$ թվով ցանկացած կետերի ուռուցիկ գծային կոմբինացիան պատկանում է այդ բազմությանը: Դիտարկենք X բազմության k հատ $x^1, x^2, ..., x^{k-1}, x^k$ կետերը և դրանց որևէ ուռուցիկ գծային կոմբինացիա՝

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i,\ \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, ... \alpha_k \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1:$$

Եթե $\alpha_k = 1$, ապա $\alpha_i = 0$, $1 \leq i \leq k-1$ և $x = x^k \in X$: Այժմ, դիցուք $\alpha_k < 1$: Այդ դեպքում $1 - \alpha_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i > 0$: Ներկայացնենք x-ը հետևյալ տեսքով՝

$$x = (1-\alpha_k) \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_k} x^i + \alpha_k x^k :$$

$\alpha_i / 1 - \alpha_k$, $i = 1, 2, ..., k-1$ թվերը ոչ բացասական են և դրանց գումարը հավասար է 1-ի՝

$$\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_k}=\frac{1}{1-\alpha_k}\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i=\frac{1}{1-\alpha_k}(1-\alpha_k)=1:$$

Հետևաբար, $x'=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_k}x^i$ արտահայտությունը X բազմության $x^1,x^2,...,x^{k-1}$ կետերի ուռուցիկ գծային կոմբինացիա է: Ինդուկցիայի ենթադրության համաձայն՝ $x'\in X$, բայց այդ դեպքում՝ $x=(1-\alpha_k)x'+\alpha_k x^k$ կետը X բազմության երկու կետերի ուռուցիկ գծային կոմբինացիա է և, հետևաբար, $x\in X$:

Հ.3. Դիցուք X_1-ը և X_2-ը կամայական ուռուցիկ բազմություններ են: Այդ դեպքում ուռուցիկ է նաև X_1+X_2 բազմությունը, որտեղ՝

$$X_1+X_2=\left\{x: x=x^1+x^2, x^1\in X_1, x^2\in X_2\right\}:$$

<u>Ապացույց</u>. Դիցուք՝ $x,\bar{x}\in X=X_1+X_2$: Ըստ սահմանման, գոյություն ունեն այնպիսի $x^1,\bar{x}^1\in X_1$ և $x^2,\bar{x}^2\in X_2$ կետեր, որ $x=x^1+x^2$, $\bar{x}=\bar{x}^1+\bar{x}^2$: Վերցնենք կամայական $\alpha\in[0,1]$ և կազմենք $\alpha x+(1-\alpha)\bar{x}$: Ունենք՝

$$\alpha x+(1-\alpha)\bar{x}=\alpha(x^1+x^2)+(1-\alpha)(\bar{x}^1+\bar{x}^2)=\alpha x^1+(1-\alpha)\bar{x}^1+\alpha x^2+(1-\alpha)\bar{x}^2:$$

Քանի որ X_1 և X_2 բազմությունները ենթադրվել են ուռուցիկ, ապա՝ $\alpha x^1+(1-\alpha)\bar{x}^1\in X_1$, $\alpha x^2+(1-\alpha)\bar{x}^2\in X_2$, հետևաբար և $\alpha x+(1-\alpha)\bar{x}\in X=X_1+X_2$:

Հ.4. Ուռուցիկ X բազմության $\bar{X}$ փակումը ուռուցիկ է:

<u>Ապացույց</u>. Դիցուք $x,y\in\bar{X}$. Այդ դեպքում գոյություն ունեն X բազմության կետերի երկու $\{x^m\},\{y^m\}$ հաջորդականություններ, որոնք զուգամիտում են համապատասխանաբար x և y կետերին: Գծային ֆունկցիայի անընդհատությունից հետևում է $\alpha x^m+(1-\alpha)y^m$ կետերի հաջորդականությունը կզուգամիտի $\alpha x+(1-\alpha)y$ կետին ցանկացած $\alpha\in[0,1]$ դեպքում: Քանի որ յուրաքանչյուր $m=1,2,...$ համար $\alpha x^m+(1-\alpha)y^m$ կետը պատկանում է X-ին, ապա $\alpha x+(1-\alpha)y$ կետը նույնպես կպատկանի $\bar{X}$-ին:

Հաջորդ երկու հատկությունների ապացուցումը թողնում ենք ընթերցողին:

Հ.5. Ուռուցիկ X բազմության ներքին կետերի X^0 բազմությունը ուռուցիկ է:

Հ.6. Ուռուցիկ X բազմության x^0 ներքին կետից դուրս եկող ցանկացած ճառագայթի վրա կա ամենաշատը մեկ եզրային կետ:

Սահմանում 2.1.**2:** X բազմության *ուռուցիկ թաղանթ* են անվանում այդ բազմությունը պարունակող $C(X)$ մինիմալ ուռուցիկ բազմությունը, այսինքն ուռուցիկ բազմություն, որն ընկած է X բազմությանը պարունակող ցանկացած այլ ուռուցիկ բազմության մեջ:

Ակնհայտ է, որ ուռուցիկ թաղանթը համընկնում է X բազմությունը պարունակող բոլոր ուռուցիկ բազմությունների հատման հետ: Սակայն բազմության ուռուցիկ թաղանթը կարելի է ստանալ նաև այլ կերպ:

Հ.7. Ոչ դատարկ X բազմության ուռուցիկ թաղանթը համընկնում է այդ բազմության կետերի բոլոր հնարավոր ուռուցիկ գծային կոմբինացիաների բազմության հետ:

<u>Ապացույց</u>: Քանի որ $C(X)$-ը ուռուցիկ է և պարունակում է X բազմության բոլոր կետերը, ապա պարունակում է նաև այդ բազմության կետերի բոլոր հնարավոր ուռուցիկ գծային կոմբինացիաները: Մյուս կողմից, X բազմության կետերի բոլոր հնարավոր ուռուցիկ գծային կոմբինացիաների բազմությունը ուռուցիկ է (քանի որ, ինչպես հեշտ է անմիջականորեն ստուգել, X բազմության կետերի ուռուցիկ գծային կոմբինացիաների ուռուցիկ գծային կոմբինացիան նույնպես այդ կետերի ուռուցիկ գծային կոմբինացիա է) և պարունակում է X -ը, հետևաբար և $C(X)$-ը:

Հաջորդ թեորեմը թույլ է տալիս ճշգրտել այս արդյունքը:

Թեորեմ 2.1.1: Ոչ դատարկ $X \subset R^n$ բազմության $C(X)$ ուռուցիկ թաղանթի յուրաքանչյուր կետ կարելի է ներկայացնել X բազմության ոչ ավել, քան $n+1$ կետերի ուռուցիկ գծային կոմբինացիայի տեսքով:

<u>Ապացույց</u>: Դիցուք $x \in C(X)$, $x = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i$, $x_i \in X, \alpha_i > 0$, $i = 1, \dots, k+1$, $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i = 1$ և $k \geq n+1$: Դիտարկենք $x_1 - x_{k+1}, x_2 - x_{k+1}, \dots, x_k - x_{k+1}$ վեկտորները: Քանի որ $k > n$, ապա այս վեկտորները գծայնորեն կախյալ են R^n –ում, այսինքն գոյություն ունեն իրական թվեր $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ $\sum_{i=1}^{k} \beta_i^2 > 0$ այնպես, որ

$$\beta_1(x_1 - x_{k+1}) + \beta_2(x_2 - x_{k+1}) + ... + \beta_k(x_k - x_{k+1}) = 0:$$

Եթե նշանակենք $\beta_{k+1} = -\sum_{i=1}^{k} \beta_i$, ապա՝

$$\sum_{i=1}^{k+1} \beta_i x_i = 0:$$

Դիտարկենք $\gamma_i = \alpha_i - \mu\beta_i$ թվերը, որտեղ μ-ն որոշվում է հետևյալ հավասարությունից՝

$$\frac{1}{\mu} = \max_{1 \le i \le k+1} \frac{\beta_i}{\alpha_i} = \frac{\beta_{i_0}}{\alpha_{i_0}}$$

Հեշտ է տեսնել, որ այս դեպքում բոլոր $i = 1, 2, ..., k+1$ համար $\gamma_i \ge 0$ և $\gamma_{i_0} = 0$: Բացի այդ՝

$$\sum_{i=1}^{k+1} \gamma_i = \sum_{i=1}^{k+1} (\alpha_i - \mu\beta_i) = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i - \mu \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} \gamma_i x_i = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i - \mu \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i x_i = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i = x:$$

Այսպիսով ստանում ենք, որ x-ը ներկայացվում է ոչ ավելի, քան k տարրերի ուռուցիկ գծային կոմբինացիայի տեսքով $(\gamma_{i_0} = 0)$: Շարունակելով այս գործընթացը, ի վերջո x կետի ներկայացման մեջ կմնա $n+1$ տարր:

Սահմանում 2.1.3: $K \subseteq R^n$ բազմությունը, որը ցանկացած $x', x'' \in K$ կետերի հետ մեկտեղ պարունակում է նաև $x = \alpha x' + \beta x''$, $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$ բոլոր կետերը, կոչվում է *ուռուցիկ կոն*:

Ուռուցիկ կոնը ուռուցիկ բազմություն է, ցանկացած $x \in K, \alpha \ge 0$ համար $\alpha x \in K$, հետևաբար ցանկացած ուռուցիկ կոն պարունակում է սկզբնակետը:

Սահմանում 2.1.**4:** Ցանկացած $X \subseteq R^n$ բազմության համար այդ բազմությունը պարունակող մինիմալ $K(X)$ ուռուցիկ կոնը կոչվում է X բազմության *կոնական թաղանթ:*

Ինչպես և ուռուցիկ թաղանթի դեպքում, կարելի է ցույց տալ, որ կոնական թաղանթը համընկնում է X բազմության կետերի բոլոր հնարավոր ոչ բացասական գծային $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$, $\alpha_i \geq 0, i = 1,...,k$ կոմբինացիաների բազմության հետ:

Սահմանում 2.1.**5:** Ուռուցիկ K կոնի համար K^* *համալուծ կոն* են անվանում հետևյալ բազմությունը՝

$$K^* = \{\alpha \in R^n :< \alpha, x > \leq 0 \text{ բոլոր } x \in K \text{ համար }\}:$$

Հ.8. K^* բազմությունը փակ ուռուցիկ կոն է:

<u>Ապացույց</u>: Նախ ցույց տանք K^*-ի ուռուցիկությունը: Դիցուք՝ $\alpha', \alpha'' \in K^*$, $\alpha \in (0,1)$, $x \in K$: Այդ դեպքում՝ $\left\langle \left(\alpha\alpha' + (1-\alpha)\alpha''\right), x \right\rangle = \alpha\left\langle \alpha', x \right\rangle + (1-\alpha)\left\langle \alpha'', x \right\rangle \leq 0$, հետևաբար՝ $\alpha\alpha' + \beta\alpha'' \in K^*$: Այժմ վերցնենք K^* կոնի $\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^k, ...$ վեկտորների հաջորդականություն, որը զուգամիտում է α-ի՝ $\lim_{k \to \infty} \alpha^k = \alpha$: Ցույց տանք, որ $a \in K^*$: Իրոք, քանի որ $\alpha^k \in K^*$, ապա $\left\langle \alpha^k, x \right\rangle \leq 0, k = 1, 2, ...$: Անցնելով այս անհավասարության մեջ սահմանի և օգտվելով սկալյար արտադրյալի անընդհատությունից, ստանում ենք՝ $\left\langle \alpha, x \right\rangle \leq 0$:

Սահմանում 2.1.6: $v \in R^n$ *կետի պրոեկցիա* $X \subset R^n$ բազմության վրա անվանում են այն $p \in X$ կետը, որի համար

$$\|p - v\| = \inf_{x \in X} \|x - v\| = \rho(v, X):$$

$\rho(v, X)$-ը անվանում են v կետի հեռավորություն X բազմությունից:

Հ.9. Ցանկացած X ուռուցիկ փակ բազմության և $v \in R^n$, $v \notin X$ համար գոյություն ունի v կետի միակ p պրոեկցիա X բազմության վրա:

Ապացույց: Դիցուք x^0-ն X բազմության որևէ կետ է: Նշանակենք B-ով $\|v-x^0\|$ շառավիղով և v կենտրոնով փակ գունդը: Այդ դեպքում $B\bigcap X$ բազմությունը փակ և սահմանափակ բազմություն է և $\inf\limits_{x\in X}\|v-x\| = \inf\limits_{x\in B\bigcap X}\|v-x\|$: Քանի որ $\|v-x\|$ ֆունկցիան անընդհատ է (ըստ x-ի), ապա այն կհասնի իր ստորին ճշգրիտեզրին, այսինքն, պրոեկցիա գոյություն ունի:

Ցույց տանք, որ եթե X-ը ուռուցիկ է, ապա պրոեկցիան միակն է: Իրոք, դիցուք գոյություն ունեն այնպիսի երկու $p', p'' \in X$ կետեր, որ $\|p'-v\| = \|p''-v\| = \rho(v, X)$: Նշանակենք՝ $p''' = \dfrac{p'+p''}{2}$: Քանի որ X-ը ուռուցիկ է, ապա $p''' \in X$: Դիտարկենք

$$\begin{aligned}\rho(p''', v) &= \|p'''-v\| = \|v - \tfrac{1}{2}p' - \tfrac{1}{2}p''\| = \|(\tfrac{1}{2}v - \tfrac{1}{2}p') + \tfrac{1}{2}v - \tfrac{1}{2}p''\| = \frac{1}{2}\|(v-p')+(v-p'')\| = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(v_i - p_i' + v_i - p_i'')^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(v_i - p_i')^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(v_i-p_i')(v_i-p_i'') + \sum_{i=1}^{n}(v_i-p_i'')^2}:\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Կոշի-Բունյակովսկու հայտնի անհավասարության համաձայն (տես, օրինակ [20])՝

$$\sum_{i=1}^{n}(v_i-p_i')(v_i-p_i'') \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(v_i-p_i')^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(v_i-p_i'')^2}\ , \tag{2.1.3}$$

ընդ որում հավասարություն կարող է լինել այն, և միայն այն դեպքում, երբ $(v-p')$ և $(v-p'')$ վեկտորները համեմատական են, այսինքն գոյություն ունեն այնպիսի α և β թվեր, $\alpha^2+\beta^2>0$, որ $\alpha(v-p')+\beta(v-p'')=0$: Եթե $\alpha+\beta=0$, ապա այստեղից կստանանք, որ $v_i - p_i' = v_i - p_i''$, $i=1,2,...,n$, այսինքն՝ $p'=p''$, ինչը հակասում է մեր ենթադրությանը: Մյուս կողմից, եթե $\alpha+\beta\neq 0$, ապա բաժանելով այս հավասարումը $\alpha+\beta$-ի վրա, կստանանք՝

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}(v-p') + \frac{\beta}{\alpha+\beta}(v-p'') = 0,$$

$$v - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}p' + \frac{\beta}{\alpha+\beta}p''\right) = 0,$$

այսինքն $v=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}p'+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}p''$, որն անհնար է, քանզի X-ը ենթադրվել է ուռուցիկ, $p', p''\in X$ և $v\notin X$:

Այսպիսով, (2.1.3) անհավասարությունը խիստ անհավասարություն է: Տեղադրելով այն (2.1.2)-ի մեջ, կստանանք՝

$$\rho(p''',v)<\frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(v_i-p_i')^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(v_i-p_i')^2}\times\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(v_i-p_i'')^2}+\sum_{i=1}^{n}(v_i-p_i'')^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(v_i-p_i')^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(v_i-p_i'')^2}\right)^2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(v_i-p_i')^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(v_i-p_i'')^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\rho(p',v)+\frac{1}{2}\rho(p'',v):$$

Այսինքն ստացանք, որ $p'''\in X$ կետը ավելի մոտ է v-ին, քան p' և p'' պրոեկցիաները: Ստացված հակասությունը ապացուցում է պնդումը:

Թեորեմ 2.1.2 (*Անջատելիության թեորեմ*): Դիցուք X-ը փակ ուռուցիկ բազմություն է, $v\in R^n, v\notin X$: Այդ դեպքում գոյություն ունի $<a,x>=c$ հիպերհարթություն այնպիսին, որ $<a,v>\ >c$ և $<a,x>\ \le c$ բոլոր $x\in X$ կետերի համար:

<u>Ապացույց</u>: v կետի պրոեկցիան X բազմության վրա նշանակենք p-ով և դիտարկենք

$$\varphi(x)=\|x-v\|^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-v_i)^2$$

ֆունկցիան: Այդ դեպքում $\inf\varphi(x)=\varphi(p)$: Ֆիքսենք որևէ $x\in X$ և դիտարկենք

$x(\alpha)=\alpha x+(1-\alpha)p, 0\le\alpha\le 1$ կետերը:

Քանի որ X-ը ուռուցիկ է, ապա $x(\alpha)$-ն պատկանում է X-ին բոլոր $0\le\alpha\le 1$ համար և, քանի որ p-ն v-ի պրոեկցիան է, ապա

$$\varphi(x(\alpha))\ge\varphi(p)=\varphi(x(0)):$$

Հետևաբար,

$$\varphi'_\alpha(x(0)) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\varphi(x(\alpha)) - \varphi(x(0))}{\alpha} \geq 0 :$$

Ածանցենք $\varphi -$ ն՝

$$\varphi'_\alpha(x(\alpha)) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i(\alpha) - v_i)^2 \right)' = 2\sum_{i=1}^{n} (x_i(\alpha) - v_i) x'_i(\alpha) :$$

Քանի որ $x_i{}'(\alpha) = (x_i - p_i), x_i(0) = p_i$, ապա

$$\varphi'_\alpha(x(\alpha)) = 2\sum_{i=1}^{n} (x_i(\alpha) - v_i)(x_i - p_i),$$

$$\varphi'_\alpha(x(\alpha)) \ \Big|_{\alpha=0} = 2\sum_{i=1}^{n} (p_i - v_i)(x_i - p_i) :$$

Այսինքն՝

$$\sum_{i=1}^{n} (p_i - v_i)(x_i - p_i) \geq 0,$$

կամ՝

$$\sum_{i=1}^{n} (p_i - v_i) x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i (p_i - v_i) \geq 0 : \qquad (2.1.4)$$

Քանի որ p և v կետերը ֆիքսած են և կախված չեն x -ից, կարող ենք նշանակել՝

$$a_i = v_i - p_i, i = 1, 2, ..., n\,, \ c = \sum_{i=1}^{n} p_i (v_i - p_i)\,,$$

և (2.1.4) անհավասարությունը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq c, \ \text{կամ} \ < a, x > \leq c :$$

Քանի որ $v \notin X$, ուստի

$$a = v - p \neq 0:$$

Մյուս կողմից

$$< a, v > -c = \sum_{i=1}^{n} (v_i - p_i) v_i - \sum_{i=1}^{n} p_i (v_i - p_i) = \sum_{i=1}^{n} (v_i - p_i)^2 > 0:$$

Այսինքն՝ $< a, v > \ > c$: Ասպիսով, թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում 2.1.7: $< a, x >= c$ հիպերհարթությունը կոչվում է *հենքային հիպերհարթություն* X բազմության համար $b \in X$ եզրային կետում, եթե ցանկացած $x \in X$ համար $< a, x > \leq c$ և $< a, b >= c$:

Հեշտ է տեսնել, որ թեորեմ 2.1.2-ի ապացուցման ընթացքում կառուցած հիպերհարթությունը հենքային է p կետում:

Դժվար չէ ապացուցել հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 2.1.3: X ուռուցիկ բազմության ցանկացած եզրային կետում գոյություն ունի X -ի հենքային հիպերհարթություն:

Առանց ապացուցման ներկայացնենք անջատելիության թեորեմի մի քանի այլ ձևակերպումներ, որոնք բավականին հաճախ են օգտագործվում:

Թեորեմ 2.1.4: Դիցուք X -ը ուռուցիկ փակ բազմություն է և v կետը չի պատկանում X -ին: Այդ դեպքում գոյություն ունի $< a, x >= c$ հիպերհարթություն, այնպես, որ $< a, v >= c$ և $< a, x > \ > c$ բոլոր $x \in X$ համար:

Թեորեմ 2.1.5: Դիցուք X -ը և Y -ը ուռուցիկ բազմություններ են և X -ը չի հատվում Y -ի ներքին կետերի բազմության հետ: Այդ դեպքում գոյություն ունի $< a, x >= c$ հիպերհարթություն, այնպես, որ $< a, x > \leq c$ բոլոր $x \in X$ և $< a, y > \geq c$ բոլոր $y \in Y$ համար:

Թեորեմ 2.1.6: Ուռուցիկ կոնի ցանկացած հենքային հիպերհարթություն անցնում է սկզբնակետով:

__Ապացույց.__ Դիցուք $<a,x>=c$ հիպերհարթությունը K կոնի հենքային հիպերհարթություն է $b\in K$ կետում, այսինքն ցանկացած $x\in K$ համար՝ $\langle a,x\rangle\le c,\langle a,b\rangle=c$: Դիտարկենք λb կետը, որտեղ $\lambda\ge 0$: Ուռուցիկ կոնի սահմանման համաձայն՝ $\lambda b\in K$, հետևաբար, $\langle a,\lambda b\rangle\le c$: Քանի որ $\langle a,\lambda b\rangle=\lambda\langle a,b\rangle=\lambda c$, ապա $\lambda c\le c$ անհավասարությունը բավարարվում է ցանկացած $\lambda\ge 0$ համար: Այստեղից՝ $(\lambda-1)c\le 0$: $\lambda=0$ դեպքում ստանում ենք $c\ge 0$, իսկ $\lambda=2$ դեպքում՝ $c\le 0$: Այսպիսով, $c=0$ և հենքային հիպերհարթության հավասարումը ստանում է հետևյալ տեսքը՝ $\langle a,x\rangle=0$, այսինքն 0 կետը պատկանում է այդ հարթությանը:

Թեորեմ 2.1.7: Դիցուք X –ը ուռուցիկ բազմություն է R^n -ում, որը չի պարունակում R^n_+ բազմության ներքին կետերը, այսինքն չի պարունակում վեկտորներ, որոնց բոլոր բաղադրիչները դրական են: Այդ դեպքում գոյություն ունի սկզբնակետով անցնող $<a,x>=0$ հիպերհարթություն, որն անջատում է X բազմությունը R^n_+ –ից:

2.2. ԳԾԱՅԻՆ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

Սահմանում 2.2.1: X ուռուցիկ բազմության x կետը անվանում են *ծայրակետ*, եթե գոյություն չունեն այնպիսի տարբեր $x', x'' \in X$ կետեր, որ $x = \frac{x' + x''}{2}$:

Սահմանում 2.2.2: X բազմությունն անվանում են *ուռուցիկ բազմանիստ*, եթե այն վերջավոր թվով կետերի ուռուցիկ թաղանթ է:

Թեորեմ 2.2.1: Ուռուցիկ բազմանիստը կոմպակտ է:

<u>Ապացույց</u>: Դիցուք X բազմությունը $x^1, x^2, ..., x^k$ կետերի ուռուցիկ թաղանթն է: Վերցնենք կամայական $\{x_m\}$ հաջորդականություն X-ից և ցույց տանք, որ այս հաջորդականությունից կարելի է ընտրել ենթահաջորդականություն, որը զուգամիտում է որևէ $\overline{x} \in X$ կետի: Քանի որ $x_m \in X$ ցանկացած m-ի համար $(m = 1, 2, ...,)$, ապա

$$x_m = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(m) x^i \ , \ \alpha_i(m) \in [0,1], \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(m) = 1:$$

$\alpha_1(m), m = 1, 2, ...$ հաջորդականությունը սահմանափակ է, հետևաբար դրանից կարելի է ընտրել զուգամետ $\alpha_1(m_{1j})$ ենթահաջորդականություն: $\alpha_2(m_{1j})$ հաջորդականությունը նույնպես սահմանափակ է, հետևաբար դրանից ևս կարելի է ընտրել զուգամետ $\alpha_2(m_{2j})$ ենթահաջորդականություն: Շարունակելով այս գործընթացը k անգամ կստանանք զուգամետ $\alpha_i(m_{kj}), i = 1, 2, ..., k$ հաջորդականություններ: Նշանակենք $\lim_{j\to\infty} \alpha_i(m_{kj}) = \alpha_i$, $i = 1, 2, ..., k$: Ակնհայտ է, որ $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$: Այսպիսով, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(m_{kj}) x^i$ հաջորդականությունը զուգամետ է և

$$\overline{x} = \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(m_{kj}) x^i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i \in X:$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Առանց ապացուցման բերենք հետևյալ արդյունքը (տես, օրինակ, [5]):

Թեորեմ 2.2.2 (Կրեյն, Միլման): *Յանկացած ոչ դատարկ կոմպակտ ուռուցիկ բազմություն R^n -ում ունի ծայրակետեր և իր բոլոր ծայրակետերի ուռուցիկ թաղանթն է:*

Սահմանում 2.2.3: Ուռուցիկ K կոնը կոչվում է *բազմանիստ կոն*, եթե այն համընկնում է իր վերջավոր թվով կետերի կոնական թաղանթի հետ:

Առանց ապացուցման բերենք նաև հետևյալ ինտուիտիվ ակներև փաստը:

Թեորեմ 2.2.3: Բազմանիստ կոնը փակ է:

Սահմանում 2.2.4: $x \in R^n, x \neq 0$ վեկտորը կոչվում է *ծայրային*, եթե այն փաստից, որ $x = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}x''$, $x', x'' \in K$ հետևում է, որ $x' = \lambda x, x'' = \mu x$ որևէ $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ համար:

Սահմանում 2.2.5: K կոնը անվանում են *սուր կոն*, եթե $x \in K$ և $-x \in K$ պայմաններից հետևում է, որ $x = 0$:

Սուր կոների համար կարելի է ապացուցել հետևյալ թեորեմը (տես, օրինակ, [5]):

Թեորեմ 2.2.4: Սուր բազմանիստ կոնը իր ծայրային վեկտորների վերջավոր բազմության կոնական թաղանթն է:

Այժմ դիտարկենք գծային անհավասարությունների համակարգեր՝

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m : \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Եթե գործակիցների մատրիցը նշանակենք A -ով, b -ով՝ $(b_1, b_2, ..., b_m)$ սյունը, ապա այս համակարգը համառոտ կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝

$$Ax \leq b, \tag{2.2.2}$$

որտեղ $x=(x_1,x_2,...,x_n)$: Եթե A մատրիցի i-երրորդ տողը նշանակենք a_i-ով, ապա (2.2.1) համակարգը կարելի է ներկայացնել նաև հետևյալ տեսքով՝

$$\langle a_i, x\rangle \le b_i, i=1,2,...,m: \qquad (2.2.3)$$

(2.2.1) համակարգի բոլոր լուծումների բազմությունը նշանակենք X-ով, այսինքն՝ $X=\{x\in R^n : Ax\le b\}$:

***Թեորեմ 2.2.5*:** *$X=\{x\in R^n : Ax\le b\}$ բազմությունը (եթե դատարկ չէ) ուռուցիկ փակ բազմություն է:*

***<u>Ապացույց</u>*:** Դիցուք $x', x''\in X$: Կազմենք $\alpha x'+(1-\alpha)x''=x$, որտեղ $\alpha\in(0,1)$: Կստանանք՝ $Ax=\alpha Ax'+(1-\alpha)Ax''\le\alpha b+(1-\alpha)b=b$: Այսպիսով, X-ը ուռուցիկ է: Փակությունը ցույց տալու համար վերցնենք X բազմության կետերի կամայական զուգամետ $x^k, k=1,2,...$ հաջորդականություն՝ $\lim_{k\to\infty}x^k=\bar{x}$: Քանի որ Ax ֆունկցիան անընդհատ է, ապա $Ax^k\le b$, $k=1,2,...$ անհավասարության մեջ անցնելով սահմանի, կստանանք $A\bar{x}\le b$:

Հեշտ է տեսնել, որ եթե $x^0\in X$ կետի համար (2.2.3) համակարգի բոլոր անհավասարությունները խիստ են՝ $\langle a_i, x^0\rangle < b_i, i=1,2,...,m$, ապա այդ կետը X բազմության ներքին կետ է: Իրոք, քանի որ անհավասարությունների թիվը վերջավոր է, ապա կարելի է նշել այնպիսի $\varepsilon>0$, որ եթե $\delta=(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)$ վեկտորի երկարությունը փոքր է ε-ից՝ $\|\delta\|<\varepsilon$, ապա բավարարվում են $\langle a_i, x^0+\delta\rangle\le b_i, i=1,2,...,m$ անհավասարությունները, այսինքն $x^0+\delta$ կետը նույնպես պատկանում է X-ին:

Առանձնակի հետաքրքրություն են ներկայացնում X բազմության ծայրակետերը: Ակներև է, որ ծայրակետը չի կարող լինել ներքին կետ: Իրոք, ցանկացած x^0 ներքին կետ կարելի է ներկայացնել $x^0=1/2(x^0+\delta)+1/2(x^0-\delta)$ տեսքով, որտեղ $x^0+\delta, x^0-\delta\in X$, որը հակասում է ծայրակետի սահմանմանը: Այսպիսով, ծայրակետը կարող է լինել X բազմության միայն եզրային կետ և, հետևաբար, ծայրակետերը հարկավոր է փնտրել (2.2.3) համակարգի այնպիսի լուծումների մեջ, որոնց համար այդ համակարգի անհավասարություններից առնվազն մեկը հավասարություն է: Այդ հանգամանքը հանգեցնում է հետևյալ սահմանմանը:

Սահմանում 2.2.6: $x^0 \in X$ եզրային կետի *կրիչ* կանվանենք (2.2.3) համակարգի այն բոլոր հավասարությունների բազմությունը, որոնց բավարարում է այդ կետը, այսինքն այն բոլոր $\left\langle a_i, x^0 \right\rangle = b_i$ հիպերհարթությունների բազմությունը, որոնց հատմանը այն պատկանում է: Նշանակենք՝ $I\left(x^0\right) = \left\{ i : \left\langle a_i, x^0 \right\rangle = b_i \right\}$:

Այս դեպքում $x^0 \in X$ եզրային կետի համար (2.2.3) համակարգը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\left\langle a_i, x \right\rangle = b_i,\ i \in I(x^0);\ \ \left\langle a_i, x \right\rangle < b_i,\ i \notin I(x^0):$$

A_+-ով նշանակենք A մատրիցի $i \in I(x^0)$ տողերից բաղկացած մատրիցը: Հետևյալ թեորեմն ամբողջությամբ բնութագրում է X բազմության ծայրակետերը: Թեորեմի ապացույցը կարելի է գտնել, օրինակ, [5]-ում:

Թեորեմ 2.2.6: *$x^0 \in X$ կետը հանդիսանում է X բազմության ծայրակետ այն, և միայն այն դեպքում, եթե A_+ մատրիցի ռանգը հավասար է n -ի*:

Քանի որ, ըստ այս թեորեմի, X բազմության յուրաքանչյուր ծայրակետ ամբողջությամբ բնորոշվում է A մատրիցի քառակուսային չվերասերված ենթամատրիցով, իսկ այդպիսի ենթամատրիցների թիվը վերջավոր է, ապա որպես հետևանք ստանում ենք հետևյալ կարևոր պնդումը:

Թեորեմ 2.2.7: *X բազմության ծայրակետերի թիվը վերջավոր է:*

Թեորեմ 2.2.8: *Եթե ոչ դատարկ $X = \left\{ x \in R^n : Ax \le b \right\}$ բազմությունը սահմանափակ է, ապա այն ուռուցիկ բազմանիստ է:*

Թեորեմի պնդումը հետևում է ուռուցիկ բազմանիստի 2.2.2 սահմանումից և 2.2.2 թեորեմից:

Ճիշտ է նաև հակառակ պնդումը.

Թեորեմ 2.2.9: *R^n -ում ցանկացած փակ ուռուցիկ բազմություն կարելի է ներկայացնել որպես գծային անհավասարությունների որևէ (վերջավոր կամ անվերջ) համակարգի լուծումների բազմություն:*

Համանմանորեն կարելի է ապացուցել հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 2.2.10: *$K = \left\{ x \in R^n : Ax \leq 0 \right\}$ բազմությունը ուռուցիկ բազմանիստ կոն է:*

Գծային անհավասարությունների համակարգեր ուսումնասիրելիս մեծ դեր է խաղում *Ֆարկաշի լեմը*: Գրականության մեջ օգտագործվում են այդ լեմի տարբեր ձևակերպումներ:

Թեորեմ 2.2.11: *Որպեսզի $Ax \leq 0, \langle c, x \rangle > 0$ անհավասարությունների համակարգը ունենա լուծում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $A^T y = c$ համակարգը չունենա ոչ բացասական լուծում:*

<u>Ապացույց</u>. *Անհրաժեշտությունը:* Դիցուք գոյություն ունի այնպիսի $y \in R^m$, որ $A^T y = c$, $y \geq 0$: Այդ դեպքում,

$$\langle c, x \rangle = \left\langle A^T y, x \right\rangle = \langle Ax, y \rangle :$$

Հետևաբար, եթե $Ax \leq 0,$ ապա $\langle c, x \rangle \leq 0$:

Բավարարությունը: Ենթադրենք, որ $A^T y = c$ համակարգը չունի ոչ բացասական լուծում: Դիտարկենք A մատրիցի a_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ վեկտոր-տողերի K կոնական թաղանթը:

Կոնական թաղանթը պարունակում է a_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ կետերի բոլոր ոչ բացասական գծային կոմբինացիաները, այսպիսով c վեկտորը չի պատկանում K կոնին (այլ կերպ կոմբինացիայի գործակիցները կհանդիսանային $A^T y = c$ համակարգի ոչ բացասական լուծումը): Անջատելիության 2.1.2 թեորեմի համաձայն գոյություն ունի հենքային հիպերհարթություն, որն անջատում է c կետը K կոնից: Քանի որ ուռուցիկ կոնի բոլոր հենքային հիպերհարթությունները անցնում են սկզբնակետով (տես, թեորեմ 2.1.6), ապա այդ հարթության հավասարումը կունենա $\langle x, a \rangle = 0$ տեսքը: Այսինքն, գոյություն ունի $x^0=(x_1,x_2,...,x_n)$ վեկտոր, որի բոլոր բաղադրիչները միաժամանակ 0 չեն և, քանի որ K կոնը փակ է (տես, թեորեմ 2.2.3)

$$\langle x^0,c\rangle>0,\ \langle x^0,a\rangle\le 0, a\in K:$$

Քանի որ a_i, $i=1,2,...,m$ կետերը պատկանում են K կոնին, կստանանք՝

$$\langle x^0,a_?\rangle=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le 0, i=1,2,...,m; \quad \langle x^0,c\rangle>0,$$

Այսինքն՝ x^0 -ն $Ax\le 0, \langle c,x\rangle>0$ համակարգի լուծում է:

Որպես հետևանք բերենք Ֆարկաշի լեմի ևս երկու ձևակերպումներ:

Թեորեմ 2.2.12: Տեղի ունի հետևյալ այլընտրանքը՝ կամ $A^T y\ge c$ համակարգը ունի ոչ բացասական լուծում, կամ ոչ բացասական լուծում ունի $Ax\le 0$, $\langle c,x\rangle>0$ համակարգը:

Թեորեմ 2.2.13: Տեղի ունի հետևյալ այլընտրանքը՝ կամ $Ax\le b$ համակարգը ունի ոչ բացասական լուծում, կամ ոչ բացասական լուծում ունի $A^T y\ge 0, \langle b,y\rangle<0$ համակարգը:

2.3. ՈՒՌՈՒՑԻԿ ԵՎ ԳՈԳԱՎՈՐ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

Սահմանում 2.3.1: Ուռուցիկ X բազմության վրա որոշված $f(x)$ իրականարժեք ֆունկցիան անվանում են *ուռուցիկ*, եթե ցանկացած երկու՝ $x, y \in X$ կետերի և $\alpha \in (0,1)$ համար տեղի ունի

$$f\left(\alpha x+(1-\alpha) y\right) \leq \alpha f\left(x\right)+(1-\alpha) f\left(y\right):$$

$f(x)$ ֆունկցիան անվանում են *գոգավոր*, եթե $-f(x)$ ֆունկցիան ուռուցիկ է, այսինքն՝

$$f\left(\alpha x+(1-\alpha) y\right) \geq \alpha f\left(x\right)+(1-\alpha) f\left(y\right)$$

ցանկացած $x, y \in X$ և $\alpha \in [0,1]$ համար: Եթե այս անհավասարությունները խիստ անհավասարություններ են, ապա ֆունկցիաներն անվանում են համապատասխանաբար խիստ ուռուցիկ և խիստ գոգավոր:

Նշենք, որ գծային ֆունկցիան միաժամանակ և ուռուցիկ է և գոգավոր:
Բերենք ուռուցիկ և գոգավոր ֆունկցիաների մի քանի հատկություններ:

Հ.2.3.1. X ուռուցիկ բազմության վրա որոշված ցանկացած $f(x)$ ուռուցիկ (գոգավոր) ֆունկցիայի և c իրական թվի համար

$$Y = \left\{x \in X : f(x) \leq c\right\}, \ \left(Y = \left\{x \in X : f(x) \geq c\right\}\right)$$

բազմությունը ուռուցիկ բազմություն է:

Այս պնդումը անմիջականորեն հետևում է ուռուցիկ ֆունկցիայի սահմանումից:

Հ.2.3.2. (*Յենսընի անհավասարությունը*) Եթե $f(x)$-ը ուռուցիկ է (գոգավոր է) X ուռուցիկ բազմության վրա, ապա ցանկացած $x_i \in X$ կետերի և $\alpha_i \geq 0,\ i=1,2,\dots,k;\ \sum_{i=1}^{k}\alpha_i = 1$ թվերի համար

$$f\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k}\alpha_i f\left(x_i\right) \quad \left(f\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{k}\alpha_i f\left(x_i\right)\right):$$

Այս անհավասարությունները հեշտությամբ ապացուցվում են մաթեմատիկական ինդուկցիայի եղանակով:

Հետևյալ թեորեմի ապացույցը կարելի է գտնել մաթեմատիկական անալիզի դասագրքերում:

Թեորեմ 2.3.1. Դիցուք $f(x)$-ը ուռուցիկ (գոգավոր) է $X \subset R$ ուռուցիկ բազմության վրա: Այդ դեպքում $f(x)$-ը անընդհատ է X բազմության բոլոր ներքին կետերում և այդ կետերում ունի աջակողմյան և ձախակողմյան ածանցյալներ, որոնք բավարարում են հետևյալ անհավասարությանը՝ $f'_-(x) \le f'_+(x)$ ($f'_-(x) \ge f'_+(x)$):

Թեորեմ 2.3.2. Դիցուք $f(x)$-ը ուռուցիկ (գոգավոր) է X ուռուցիկ բազմության վրա: Այդ դեպքում $f(x)$ ֆունկցիայի լոկալ մինիմումը նաև գլոբալ մինիմում է (լոկալ մաքսիմումը նաև գլոբալ մաքսիմում է): Խիստ ուռուցիկության կամ գոգավորության դեպքում այն միակն է:

Ապացույց. Որոշակիության համար ենթադրենք, որ $f(x)$-ը գոգավոր է: Դիցուք $x^* \in X$ ֆունկցիայի լոկալ մաքսիմումի կետ է, այսինքն գոյություն ունի $I \subseteq X$, $x^* \in I$ շրջակայք, որ ցանկացած $x \in I$ համար

$$f\left(x^*\right) \ge f\left(x\right):$$

Ենթադրենք, որ $x^* \in X$ կետը գլոբալ մաքսիմումի կետ չէ: Այդ դեպքում պետք է գոյություն ունենա այնպիսի $x' \in X$, որի համար

$$f\left(x'\right) > f\left(x^*\right):$$

Վերցնենք $\alpha \in (0,1)$ և կազմենք $x = \alpha x^* + (1-\alpha)x'$ կոմբինացիան: Քանի որ X-ը ուռուցիկ է, ապա $x \in X$ և

$$f\left(x\right) \ge \alpha f\left(x^*\right) + (1-\alpha) f\left(x'\right) > \alpha f\left(x^*\right) + (1-\alpha) f\left(x^*\right) = f\left(x^*\right):$$

Այս անհավասարությունը հակասում է նրան, որ x^*-ը լոկալ մաքսիմումի կետ է, քանի որ բավականաչափ 1-ին մոտիկ α-ների համար x-ը կպատկանի I շրջակայքին:

Թեորեմ 2.3.3. Դիցուք $f(x)$-ը ուռուցիկ է (գոգավոր է) իրական առանցքի որևէ I միջակայքում և ածանցելի է այդ միջակայքի որևէ u կետում: Այդ դեպքում, ցանկացած $v \in I$ համար

$$f'(u)(v-u) \le f(v)-f(u), \quad (f'(u)(v-u) \ge f(v)-f(u)):$$

<u>Ապացույց</u>. Քանի որ $f(x)$-ը ենթադրել ենք ուռուցիկ, ապա ցանկացած $\alpha \in [0,1]$ համար՝

$$f(u+\alpha(v-u)) \le f(u)+\alpha\left[f(v)-f(u)\right],$$

$$f(u+\alpha(v-u))-f(u) \le \alpha\left[f(v)-f(u)\right],$$

$$\frac{(v-u)\left[f(u+\alpha(v-u))-f(u)\right]}{\alpha(v-u)} \le f(v)-f(u):$$

Զգտեցնելով α-ն 0-ի և հաշվի առնելով, որ $f(x)$-ը ածանցելի է u կետում, կստանանք թեորեմի պնդումը:

Թեորեմ 2.3.4. Դիցուք $f(x)$-ը ուռուցիկ է իրական առանցքի որևէ I միջակայքում, $r,s,t \in I$ և $r<s<t$: Այդ դեպքում տեղի ունեն հետևյալ անհավասարությունները՝

$$\frac{f(s)-f(r)}{s-r} \le \frac{f(t)-f(r)}{t-r} \le \frac{f(t)-f(s)}{t-s}:$$

<u>Ապացույց</u>. Օգտվելով

$$1=\frac{t-s}{t-r}+\frac{s-r}{t-r}, \quad s=\frac{t-s}{t-r}r+\frac{s-r}{t-r}t$$

նույնություններից, կստանանք՝

$$f(s) \le \frac{t-s}{t-r}f(r)+\frac{s-r}{t-r}f(t):$$

Պահանջվող անհավասարությունները ստացվում են այստեղից ոչ բարդ ձևափոխությունների միջոցով:

Մեզ հարկավոր կլինի նաև թեորեմ 2.3.3-ի ընդհանրացումը R^n-ի վրա: Բերենք այդ թեորեմն առանց ապացուցման:

Թեորեմ 2.3.5. Դիցուք $f(x)$-ը ուռուցիկ է (գոգավոր է) R^n-ի վրա և ունի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ: Այդ դեպքում բոլոր $u,v\in R^n$ համար՝

$$\left\langle \nabla f(u), v-u \right\rangle \le f(v)-f(u), \quad \left(\left\langle \nabla f(u), v-u \right\rangle \ge f(v)-f(u)\right),$$

որտեղ՝ $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$:

ՕԳՏԱՎԵՏՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Որոշումներ ընդունելու խնդիրները հիմնականում գործ ունեն թույլատրելի որոշումների բազմությունների և այդ բազմությունների վրա տրված նախընտրելիության հարաբերությունների հետ: Նախընտրելիության հարաբերությունների դիտարկումը կապված է այն հանգամանքի հետ, որ շատ կիրառություններում որոշում ընդունողն ի վիճակի չէ քանակապես հաշվել կամ գնահատել այն ելքը, որին կհանգեցնի այս կամ այն որոշումը: Սակայն նա համարյա միշտ կարող է որոշ (պարտադիր չէ բոլոր) ելքերի զույգերի համար նշել, թե այդ երկու ելքերից ինքը որն է նախընտրում: Օգտավետության տեսությունը փորձում է պատասխանել այն հարցին, թե հնարավոր է արդյոք, հիմնվելով միայն անցկացրած համեմատությունների վրա, համեմատվող որոշումներին վերագրել այնպիսի քանակական գնահատականներ, որ նախընտրելի որոշմանը համապատասխանի ավելի մեծ գնահատական:

Օգտավետության տեսության ընդհանուր խնդիրը կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ: Դիցուք տրված է որոշումներ ընդունելու խնդիր՝ $\langle X, \succsim \rangle$, որտեղ X-ը կամայական բազմություն է, որն անվանում են *պատահույթների բազմություն*, $\succsim$-ը որևէ բինար հարաբերություն է X-ի վրա: Ընդունված է ենթադրել, որ այդ հարաբերությունը բավարարում է թույլ գծային կարգավորվածության հարաբերության պայմաններին: Հաճախ ավելի հարմար է լինում դիտարկել երկու հարաբերություններ՝ $\succ$-խիստ նախընտրելիություն և $\sim$ - համարժեքություն: Ավելի ստույգ. Դիցուք տրված է $\langle X, \succ, \sim \rangle$ համակարգ, որտեղ X-ը կամայական բազմություն է, իսկ հարաբերությունները բավարարում են հետևյալ աքսիոմներին՝

- Յանկացած երկու՝ $x \in X, y \in X$ պատահույթների համար տեղի ունի հետևյալ երեք պնդումներից մեկը՝ $x \succ y, y \succ x, x \sim y$,
- $x \sim x$ ցանկացած $x \in X$ համար,
- Եթե $x \sim y$, ապա $y \sim x$,
- Եթե $x \sim y$ և $y \sim z$, ապա $x \sim z$,
- Եթե $x \succ y$ և $y \succ z$, ապա $x \succ z$, (3.1.1)
- Եթե $x \succ y$ և $y \sim z$, ապա $x \succ z$,
- Եթե $x \sim y$ և $y \succ z$, ապա $x \succ z$:

Այժմ անցնենք օգտավետության տեսության հիմնական խնդրին՝ կառուցել այնպիսի $u: X \to R$ ֆունկցիա, որպեսզի ցանկացած $x \in X, y \in X$ պատահույթների համար՝ $u(x) > u(y)$, այն և միայն այն դեպքում, երբ $x \succ y$:

Այսպիսի ֆունկցիաներն անվանում են *օգտավետության ֆունկցիաներ*: Կան օգտավետության ֆունկցիաների կառուցման տարբեր մոտեցումներ: Այստեղ կդիտարկվի միայն հավանականային մոտեցումը: Ընդհանուր դեպքում որոշումները կարող են ընդունվել անորոշության պայմաններում, այսինքն՝ որոշումը կարող է հանգեցնել մի քանի ելքերի, ընդ որում, որոշում ընդունելիս հայտնի չէ, թե ելքերից որը կիրականանա: Այս հանգամանքը հարկադրում է դիտարկել այսպես կոչված ”*վիճակախաղեր*”: Անցնենք ֆորմալ սահմանումներին:

Դիցուք որևէ որոշում կարող է հանգեցնել երկու՝ x և y ելքերի, համապատասխանաբար, p և $(1-p)$ հավանականություններով: Այս դեպքում որոշման ելքը կոչվում է *վիճակախաղ* և նշանակվում է $px+(1-p)y$: Սա հանրահաշվական արտահայտություն չէ, այլ միայն պայմանական նշանակումն է այն բանի, որ p հավանականությամբ կարող է հանդես գալ x պատահույթը, իսկ ($1-p$) հավանականությամբ՝ y պատահույթը: Նմանապես կարելի է սահմանել վիճակախաղեր երեք և ավելի ելքերով: Ենթադրվում է, որ վիճակախաղերը նույնպես պատահույթներ են, հետևաբար կարող են լինել վիճակախաղեր, ոռնց ելքերը վիճակախաղեր են: Բացի այդ պահանջենք, որ ցանկացած $x, y, z \in X$ և $p, q \in [0,1]$ համար վիճակախաղերը բավարարեն հետևյալ աքսիոմներին՝

Ա.1. $px+(1-p)x = x,$

Ա.2. $px+(1-p)y = (1-p)y + px,$

Ա.3. $px+(1-p)\left[qy+(1-q)z\right] = px+(1-p)qy+(1-p)(1-q)z:$

Դժվար չէ տեսնել, որ այս աքսիոմները թույլ են տալիս վարվել վիճակախաղերի հետ այնպես, ինչպես սովորական հանրահաշվական արտահայտության հետ:

Քանի որ ենթադրվում է, որ վիճակախաղերը նույնպես պատահույթներ են, ապա նախընտրելիության հարաբերությունները կարելի է տարածել նաև վիճակախաղերի վրա՝

Ա.4. Եթե $x \sim z$, ապա ցանկացած $y \in X, p \in [0,1]$ համար՝

$$px + (1-p)y \sim pz + (1-p)y,$$

Ա.5. Եթե $x \succ z$, ապա ցանկացած $y \in X, p \in [0,1]$ համար՝

$$px + (1-p)y \succ pz + (1-p)y:$$

Բացի այս աքսիոմներից, կենթադրենք, որ վիճակախաղերի բազմությունը բավարարում է նաև, այդպես կոչված, “լրիվության” աքսիոմին:

Ա.6. Դիցուք $x \succ y \succ z$: Այս դեպքում գոյություն ունի այնպիսի $p \in [0,1]$, որ

$$y \sim px + (1-p)z:$$

X բազմության տարրերից կազմված բոլոր հնարավոր վիճակախաղերի բազմությունը նշանակենք $\tilde{X}$ -ով: Ակնհայտ է, որ $\tilde{X} \supseteq X$: Սովորաբար կիրառություններում ենթադրվում է, որ X -ը n -չափանի էվկլիդեսյան տարածության ենթաբազմություն է՝ $X \subseteq R^n$ և այդ դեպքում $\tilde{X}$ բազմությունը կարելի է պատկերացնել որպես X -ի ուռուցիկ թաղանթ:

Լեմ 3.1.1. Եթե $p_1 > p_2$ և $x \succ y$, ապա

$$p_1 x + (1-p_1)y \succ p_2 x + (1-p_2)y:$$

<u>Ապացույց:</u> Քանի որ $p_1 > p_2$, ապա $0 < p_1 - p_2 < 1 - p_2$: Օգտվելով Ա.1 աքսիոմից և

$$\frac{p_1 - p_2}{1 - p_2} + \frac{1 - p_1}{1 - p_2} = 1$$

նույնությունից, կստանանք, որ

$$\frac{p_1 - p_2}{1 - p_2} y + \frac{1 - p_1}{1 - p_2} y = y:$$

Ըստ Ա.3 աքսիոմի՝

$$p_1x+(1-p_1)y = p_2x+(1-p_2)\left(\frac{p_1-p_2}{1-p_2}x+\frac{1-p_1}{1-p_2}y\right):$$

Հետևաբար, Ա.5 աքսիոմից `

$$p_1x+(1-p_1)y \succ p_2x+(1-p_2)y:$$

Հետևանք. Ա.6 աքսիոմով որոշվող p -ն միակն է և $p\in(0,1)$:

Այժմ անցնենք օգտավետության ֆունկցիաների գոյության խնդրին: Քանի որ ավելացնելով վիճակախաղերը մենք ընդլայնեցինք որոշումների բազմությունը, ապա հարկավոր է որոշել նաև վիճակախաղերի օգտավետությունը: Քանի որ վիճակախաղի ելքը պատահական է, ապա վիճակախաղի օգտավետությունը բնական է սահմանել որպես օգտավետության մաթեմատիկական սպասում, այսինքն`

$$u(px+(1-p)y) = pu(x)+(1-p)u(y): \tag{3.1.2}$$

Թեորեմ 3.1.1. Դիցուք X բազմությունը լիովին կարգավորյալ է նախընտրելիության հարաբերություններով (բավարարում է 4.1 աքսիոմներին) և վիճակախաղերը բավարարում են Ա.1-Ա.6 աքսիոմներին: Այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի $u:\tilde{X}\to R$ ֆունկցիա, որ ցանկացած $x,y\in\tilde{X}$ և $p\in(0,1)$ համար`

1. $u(x)>u(y) \Leftrightarrow x\succ y,$

2. $u(px+(1-p)y) = pu(x)+(1-p)u(y):$

Բացի այդ, $u(x)$ ֆունկցիան միակն է դրական գծային ձևափոխության ճշտությամբ, այսինքն` յուրաքանչյուր այլ $v(x)$ օգտավետության ֆունկցիայի համար կգտնվեն այնպիսի $a>0$ և b իրական թվեր, որ $v(x)=au(x)+b$:

Ապացույց: Վերցնենք երկու կամայական` $e_1,e_0\in\tilde{X}$, այնպիսիք, որ $e_1\succ e_0$: Եթե այդպիսիք գոյություն չունեն, այսինքն բոլոր պատահույթները համարժեք են, ապա կվերցնենք $u(x)\equiv 0$:

Այժմ, դիցուք $x \in \tilde{X}$-ը կամայական պատահույթ է: Քանի որ $\tilde{X}$-ը լիովին կարգավորյալ է, ուստի հնարավոր են հետևյալ հինգ դեպքերը՝ 1) $x \succ e_1$, 2) $x \sim e_1$, 3) $e_1 \succ x \succ e_0$, 4) $x \sim e_0$, 5) $e_0 \succ x$: Այս դեպքերից յուրաքանչյուրի համար կառուցենք օգտավետության ֆունկցիան:

1. $x \succ e_1 \succ e_0$: Այս դեպքում, ըստ Ա.6 աքսիոմի, գոյություն ունի $p \in (0,1)$ այնպես, որ $e_1 \sim px + (1-p)e_0$: Վերցնենք՝ $u(x) = \dfrac{1}{p}$:

2. $x \sim e_1$: Այս դեպքում վերցնենք $u(x) = 1$:

3. $e_1 \succ x \succ e_0$: Այս դեպքում, ըստ Ա.6 աքսիոմի, գոյություն ունի $p \in (0,1)$ այնպես, որ $x \sim pe_1 + (1-p)e_0$: Վերցնենք՝ $u(x) = p$:

4. $x \sim e_0$: Այս դեպքում վերցնենք $u(x) = 0$:

5. $e_1 \succ e_0 \succ x$: Այս դեպքում, ըստ Ա.6 աքսիոմի, գոյություն ունի $p \in (0,1)$ այնպես, որ $e_0 \sim pe_1 + (1-p)x$: Վերցնենք՝ $u(x) = \dfrac{p}{p-1}$:

Այսպիսով, $u(x)$ ֆունկցիան որոշեցինք բոլոր $x \in \tilde{X}$ համար: Ապացուցենք, որ այն բավարարում է (3.1.1) և (3.1.2) պայմաններին: Դիցուք $x, y \in \tilde{X}$, $x \succ y$: Այս պատահույթներից յուրաքանչյուրի համար կարող է տեղի ունենալ 1-5 դեպքերից մեկը: Հետևաբար, թեորեմն ամբողջությամբ ապացուցելու համար հարկավոր է դիտարկել բոլոր 25 դեպքերը: Մենք թեորեմը կապացուցենք միայն մեկ՝ $e_1 \succ x \succ y \succ e_0$ դեպքի համար:

Դիցուք՝ $x \sim pe_1 + (1-p)e_0$, $y \sim qe_1 + (1-q)e_0$, այսինքն՝ $u(x) = p$, $u(y) = q$: Եթե $p > q$, ապա, ըստ լեմ 4.1-ի ՝

$$x \sim pe_1 + (1-p)e_0 \succ qe_1 + (1-q)e_0 \sim y:$$

Եվ հակառակը, եթե $p < q$, ապա՝

$$y \sim qe_1 + (1-q)e_0 \succ pe_1 + (1-p)e_0 \sim x:$$

Այժմ ցույց տանք $u(x)$ ֆունկցիայի գծային լինելը: Վերցնենք որևէ $s \in (0,1)$ և կազմենք $sx + (1-s)y$ վիճակախաղը.

$$sx + (1-s)y \sim s\left[pe_1 + (1-p)e_0\right] + (1-s)\left[qe_1 + (1-q)e_0\right]:$$

Օգտվելով Ա.3 աքսիոմից, կստանանք`

$$sx + (1-s)y \sim \left[sp + (1-s)q\right]e_1 + \left[s(1-p) + (1-s)(1-q)\right]e_0:$$

Եվ, քանի որ բոլոր պատահույթները համապատասխանում են 3-րդ դեպքին, ապա`

$$u\big(sx + (1-s)y\big) = sp + (1-s)q = su(x) + (1-s)u(y):$$

Այժմ ցույց տանք օգտավետության ֆունկցիայի միակությունը: Դիցուք, բացի կառուցված $u(x)$ ֆունկցիայից, գոյություն ունի նաև մեկ այլ` $v(x)$ ֆունկցիա, որը նույնպես բավարարում է (3.1.1) և (3.1.2) պայմաններին: Այդ դեպքում, քանի որ ենթադրվել է, որ $x \sim pe_1 + (1-p)e_0$, ապա`

$$v(x) = v\big(pe_1 + (1-p)e_0\big) = pv(e_1) + (1-p)v(e_0) = p\big(v(e_1) - v(e_0)\big) + v(e_0):$$

Քանի որ $v(e_1), v(e_0)$-երը կախված չեն x-ից, նշանակենք ` $v(e_1) - v(e_0) = a, v(e_0) = b$ ( $a > 0$ , քանի որ $v(e_1) > v(e_0)$ ) և , հաշվի առնելով, որ $p = u(x)$, վերջնականապես կստանանք`

$$v(x) = au(x) + b:$$

Տնտեսագիտությունում օգտավետության ֆունկցիան կիրառվում է ապրանքների հավաքածուների գնահատման համար: Ենթադրվում է, որ շուկայում ներկա են n տեսակի ապրանքներ և եթե x_i-ով նշանակենք i- րդ տեսակի ապրանքի քանակը, ապա հավաքածուն n-չափանի վեկտոր է` $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$: Այս դեպքում պատահույթների բազմությունը $n$-չափանի էվկլիդեսյան տարածության ենթաբազմություն է` $X \subseteq R^n$, իսկ $\tilde{X}$-ը այդ բազմության ուռուցիկ թաղանթը:

Բնական պահանջներից մեկն այն է, որ օգտավետության $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ ֆունկցիան լինի չնվազող ֆունկցիա $(x \geq y \to u(x) \geq u(y))$: Բացի այդ, հաճախ ենթադրվում է, որ այն անընդհատ է, ունի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ: Մասնակի $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ ածանցյալները անվանում են *ֆիկտիվ* կամ *արդար գներ*:

- Ասում են, որ i–րդ ապրանքը ենթակա է *եկամտի նվազման օրենքի,* եթե՝

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \leq 0:$$

- Ասում են, որ i–րդ ապրանքը *փոխարինելի* է j-րդ ապրանքով, եթե՝ $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \leq 0$

:

- Ասում են, որ i–րդ և j-րդ ապրանքները *լրացուցիչ* են միմիանց նկատմամբ, եթե՝

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \geq 0:$$

- Ասում են, որ որևէ, օրինակ, n-րդ ապրանքը *անջատելի է*, եթե գոյություն ունեն այնպիսի $v(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ և $\varphi(x_n)$ ֆունկցիաներ, որ՝

$$u(x_1, x_2, ..., x_n) = v(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) + \varphi(x_n):$$

- Այն դեպքերում, երբ $\varphi(x_n)$ ֆունկցիան գծային է, ասում են, որ այդ ապրանքը *գծայնորեն փոխանցելի է*:

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԾՐԱԳՐՈՒՄ

4.1 ԿՈՒՆ-ԹԱԿԵՐԻ ԹԵՈՐԵՄ

Առաջին բաժնի 1.2 կետում դիտարկվել է պայմանական էքստրեմումի խնդիրը՝

$$\begin{cases} \max\limits_{x \in X} f(x), \\ X = \left\{ x \in R^n : g_j(x) = 0,\ j = 1, 2, ..., m \right\}, \end{cases}$$

որտեղ նաև բերվել է այս խնդրի լուծման Լագրանժի եղանակը: Սակայն շատ կիրառություններում, օրինակ ժամանակակից տնտեսագիտության շատ խնդիրներում, սահմանափակումները կարող են տրված լինել ոչ միայն հավասարումների, այլ նաև անհավասարությունների տեսքով: Բացի այդ, ֆունկցիաները կարող են չբավարարել այն պայմաններին, որոնք պահանջվում են Լանգրաժի մեթոդի կիրարկման ժամանակ (օրինակ չլինեն դիֆերենցելի):

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը, որն անվանում են մաթեմատիկական ծրագրման ընդհանուր խնդիր.

$$\begin{cases} f(x) \to \max \\ g_i(x) \geq 0, i = 1, 2, ..., m \ : \\ x \in A \subseteq R^n \end{cases} \tag{4.1.1}$$

Այս խնդրում $f(x)$ ֆունկցիան անվանում են նպատակային ֆունկցիա, իսկ

$g_i(x) \geq 0,\ i = 1, 2, ..., m$ անհավասարություններն անվանում են խնդրի սահմանափակումներ:

$$G = \left\{ x \in A \subseteq R^n : g_i(x) \geq 0, i = 1, 2, ..., m \right\}$$

բազմությունն անվանում են թույլատրելի բազմություն: Խնդիրն անվանում են թույլատրելի, եթե թույլատրելի բազմությունը դատարկ չէ (այսինքն անհավասարությունների համակարգը համատեղելի է A-ում): Խնդիրն անվանում են սահմանափակ, եթե $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է վերևից G բազմության վրա:

Իհարկե, (4.1.1) խնդրի լուծման վերաբերյալ կարելի է խոսել միայն այն դեպքում, երբ խնդիրը թույլատրելի է և սահմանափակ: Սակայն իրական խնդիրներ լուծելիս՝ նախորոք անհրաժեշտ պայմանների ստուգումը բերում է բարդությունների, և հնարավոր է միայն խնդրի լուծման ընթացքում:

Մաթեմատիկական ծրագրման (4.1.1) խնդրի համար կառուցենք հետևյալ ֆունկցիան, որը հաճախ անվանում են Լագանժի ֆունկցիա՝

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x), \tag{4.1.2}$$

որտեղ $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m), \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, ..., m$: $L(x,\lambda)$ ֆունկցիայի թամբակետ կանվանենք (x^0, λ^0) զույգը, որտեղ $x^0 \in A$, $\lambda^0 \in R_+^{\ m}$, եթե բոլոր $x \in A$, $\lambda \in R_+^m$ համար տեղի ունի հետևյալ կրկնակի անհավասարությունը՝

$$L(x,\lambda^0) \leq L(x^0,\lambda^0) \leq L(x^0,\lambda\ ): \tag{4.1.3}$$

Հետևալ թեորեմը արտահայտում է (4.1.1) խնդրի լուծման և $L(x,\lambda)$ ֆունկցիայի թամբակետի գոյության կապը:

Թեորեմ 4.1.1 *(Կուն-Թաքերի թեորեմ): Եթե գոյություն ունի $L(x,\lambda)$ ֆունկցիայի (x^0, λ^0) թամբակետ, ապա գոյություն ունի (4.1.1) խնդրի լուծում, ընդ որում այդ լուծումը x^0 -ն է:*

Դիցուք բոլոր $f(x)$, $g_i(x)$, $(i = 1, 2..., m)$, ֆունկցիաները գոգավոր են, A բազմությունը ուռուցիկ է և գոյություն ունի $x^* \in A$ կետ, այնպիսին, որ $g_i(x^*) > 0, (i = 1, 2..., m)$ (Սլեյթըրի պայման): Այդ դեպքում, եթե (4.1.1) խնդիրն ունի լուծում, ապա $L(x,\lambda)$ ֆունկցիան ունի թամբակետ:

<u>Ապացույց:</u> Նախ ապացուցենք թեորեմի առաջին մասը: Դիցուք (x^0, λ^0) զույգը $L(x,\lambda)$ ֆունկցիայի թամբակետն է, այսինքն՝ բոլոր $x \in A$ և $\lambda \in R_+^m$ վեկտորների համար բավարարվում է (4.1.3) անհավասարությունը, այսինքն՝

$$f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \leq f(x^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda^0{}_i g_i(x^0) \leq f(x^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x^0): \tag{4.1.4}$$

Այս կրկնակի անհավասարության աջ մասից ստանում ենք, որ բոլոր $\lambda \in R_+^m$ համար

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda^0{}_i g_i(x^0) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x^0): \tag{4.1.5}$$

Եթե որևէ i_0 համար տեղի ունենար $g_{i_0}(x^0) < 0$ անհավասարությունը, ապա քանի որ (4.1.5) անհավասարությունը բավարարվում է բոլոր $\lambda \in R_+^m$ համար, ընտրելով բավականաչափ մեծ λ_{i_0} կարելի է (4.1.5) անհավասարության աջ մասը դարձնել ցանկացած չափով փոքր: Այս հակասությունից հետևում է, որ բոլոր $i = 1, 2..., m$ համար $g_i(x^0) \geq 0$, այսինքն x^0-ն (4.1.1) խնդրի թույլատրելի կետ է:

Այժմ դիտարկենք (4.1.4) անհավասարության երկու ծայրերի անդամները՝

$$f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 g_i(x) \leq f(x^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x^0):$$

Այս անհավասարությունը տեղի ունի բոլոր $x \in A$ և $\lambda \in R_+^m$, այդ թվում $\lambda = 0$ համար՝

$$f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 g_i(x) \leq f(x^0):$$

Բոլոր թույլատրելի x կետերի համար $g_i(x) \geq 0, i = 1, 2, ..., m$, և հաշվի առնելով, որ $\lambda^0 \in R_+^m$, ունենք , որ $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 g_i(x) \geq 0$: Հետևաբար, բոլոր թույլատրելի x կետերի համար՝

$$f(x) \leq f(x^0), \quad x \in G,$$

այսինքն՝ x^0-ն (4.1.1) խնդրի լուծումն է:

Այժմ ապացուցենք թեորեմի երկրորդ մասը: Դիցուք՝

$$f(x^0) = \max_{x \in G} f(x), \quad G = \left\{x \in A \subseteq R^n : g_i(x) \geq 0, i = 1, 2, ..., m\right\}:$$

Նշանակենք $g_0(x) = f(x) - f(x^0)$ և դիտարկենք հետևյալ բազմությունը՝

$$E=\left\{y=\left(y_0,y_1,...,y_m\right)\in R^{m+1}:\exists x\in A: y_i\le g_i(x), i=0,1,2,...,m;\right\}:$$

Ցույց տանք, որ E բազմությունը ուռուցիկ բազմություն է: Դիցուք՝ $y',y''\in E,\alpha\in(0,1)$: E բազմության սահմանումից հետևում է, որ գոյություն ունեն $x',x''\in X$ այնպիսիք, որ $y'\le g(x'), y''\le g(x'')$: Նշանակենք $y'''=\alpha y'+(1-\alpha)y''$: Այս վեկտորի i-րդ բաղադրիչի համար կստանանք՝

$$y_i'''=\alpha y_i'+(1-\alpha)y_i''\le \alpha g_i(x')+(1-\alpha)g_i(x''):$$

Քանի որ բոլոր $g_i(x), i=0,1,2,...,m$ ֆունկցիաները ենթադրվել են գոգավոր ֆունկցիաներ, ապա՝

$$\alpha g_i(x')+(1-\alpha)g_i(x'')\le g_i\left(\alpha x'+(1-\alpha)x''\right):$$

A բազմությունը ուռուցիկ է, հետևաբար՝ $\alpha x'+(1-\alpha)x''\in A$, և այստեղից հետևում է, որ $y'''\in E$:

Քանի որ x^0-ն (4.1.1) խնդրի լուծումն է, ապա բոլոր թույլատրելի $x\in G$ կետերի համար՝ $g_0(x)\le 0$: Այսինքն E բազմությունը չի կարող պարունակել ոչ բացասական վեկտորներ, բացի գուցե միայն 0 կետից, հետևաբար չի հատվում R_+^{m+1} դրական օկտանտի ներքին կետերի բազմության հետ: Ուռուցիկ բազմությունների անջատելիության վերաբերյալ թեորեմից (տես թ.2.1.7) E բազմությունը կարելի է անջատել R_+^{m+1}-ից հիպերհարթությամբ, որն անցնում է սկզբնակետով: Անալիտիկորեն սա նշանակում է, որ գոյություն ունեն այնպիսի $(\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_m)=\lambda$ թվեր, որոնք միաժամանակ 0 չեն, որ

$$<\lambda,z>\ge 0,\qquad z\in R_+^{m+1}, \tag{4.1.6}$$

$$<\lambda,z>\le 0,\qquad z\in E\ : \tag{4.1.7}$$

(4.1.6) անհավասարությունը տեղի ունի բոլոր ոչ բացասական վեկտորների համար, այդ թվում նաև՝ միավոր, այսինքն՝

$$
\begin{aligned}
&e^1 = (1,0,0,\dots,0),\\
&e^2 = (0,1,0,\dots,0),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&e^{m+1} = (0,0,0,\dots,1)
\end{aligned}
$$

վեկտորների համար:

Տեղադրելով (4.1.6) անհավասարության մեջ, կստանանք

$$< \lambda, e^i >= \lambda_{i-1} \geq 0, i = 1,2,\dots,m+1:$$

Մյուս կողմից, ցանկացած $x \in A$ համար $(g_0(x), g_1(x),\dots, g_m(x))$ վեկտորը պատկանում է E բազմությանը: Տեղադրելով (4.1.7) անհավասարության մեջ, ստանում ենք՝

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i g_i(x) \leq 0,$$

այսինքն՝

$$\lambda_0 (f(x) - f(x^0)) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \leq 0, \qquad x \in A:$$

Եթե $\lambda_0 = 0$, ապա այս անհավասարությունը կվերածվի

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \leq 0 \ , \quad x \in A:$$

Սակայն դա հակասում է Սլեյթըրի պայմանին, ըստ որի գոյություն ունի $x^* \in A$, որի համար $g_i(x^*) > 0, i = 1,2,\dots,m$: Ասպիսով, $\lambda_0 > 0$:

Բաժանենք անհավասարությունը λ_0-ի վրա և նշանակենք $\lambda_i^0 = \dfrac{\lambda_i}{\lambda_0}$, $i = 1,2,\dots,m$: Կստանանք՝

$$f(x^0) \geq f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 g_i(x) = L(x, \lambda^0) \ , \quad x \in A: \tag{4.1.8}$$

Քանի որ $g_i(x^0) \ge 0,\ \ i=1,2,...,m$, ուստի բոլոր $\lambda \in R_+^m$ համար `

$$f(x^0) \le f(x^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x^0) = L(x^0, \lambda):$$

Այժմ, եթե (4.1.8) անհավասարության մեջ տեղադրենք $x = x^0$, կստանանք՝

$$f(x^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 g_i(x^0) \le f(x^0): \qquad (4.1.9)$$

Աստեղից, քանի որ $\lambda_i^0 \ge 0$, $g_i(x^0) \ge 0$, $i=1,2,...,m$, ոչ բացասական են, հետևում է, որ

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 g_i(x^0) = 0$$

և

$$L(x^0, \lambda^0) = f(x^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 g_i(x^0) = f(x^0) \qquad (4.1.10)$$

Միացնելով (4.1.8), (4.1.9) և (4.1.10) անհավասարությունները, ստանում ենք՝

$$L(x, \lambda^0) \le L(x^0, \lambda^0) \le L(x^0, \lambda),$$

բոլոր $\lambda \in R_+^m$, $x \in A$ կետերի համար:

Նշենք, որ մաթեմատիկական ծրագրման մինիմալացման խնդրում, այսինքն

$$\begin{cases} f(x) \to \min \\ g_i(x) \ge 0, i=1,2,...,m \\ x \in A \subset R^n \end{cases}$$

տեսք ունեցող խնդրում թեորեմի պայմաններում նպատակային ֆունկցիայի գոգավորության պահանջը փոխարինվում է ուռուցիկության պահանջով, իսկ (4.1.3) անհավասարությունը՝

$$L(x, \lambda^0) \ge L(x^0, \lambda^0) \ge L(x^0, \lambda\ \ )$$

անհավասարությամբ:

Կուն-Թաքերի թեորեմը շատ պարզ տեսք է ստանում գծային խնդիրներում, այսինքն, երբ $f(x)$, $g_i(x), i = 1, 2, ..., m$ ֆունկցիաները գծային են: Բերենք այդ թեորեմն առանց ապացուցման:

Թեորեմ *4.1.2* Որպեսզի մաթեմատիկական ծրագրման գծային խնդրում գոյություն ունենա լուծում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենա $L(x, \lambda)$ ֆունկցիայի թամբակետ բոլոր $x \geq 0, \lambda \geq 0$ վեկտորների համար:

4.2. ԳԾԱՅԻՆ ԾՐԱԳՐՈՒՄ

Գծային ծրագրման խնդիրը մաթեմատիկական ծրագրման խնդրի մասնավոր դեպքն է, երբ բոլոր $f(x), g_j(x), j=1,...,n$ ֆունկցիաները գծային ֆունկցիաներ են: Այս խնդիրը պատմականորեն ընդունված է ձևակերպել հետևյալ կերպ՝

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i=1,...,m, \\ x_j \ge 0, j=1,...,n \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Նշանակենք ՝ $c=(c_1,c_2,...,c_n)$, $b=(b_1,b_2,...,b_m)$, $A=\left\{a_{ij}\right\}_{i=1,m}^{j=1,n}$:

Այս նշանակումներով (4.2.1) խնդիրը կարելի է գրել համառոտ տեսքով՝

$$\begin{cases} \langle c,x\rangle \to \max, \\ Ax \le b, \\ x \ge 0 \end{cases} \qquad (4.2.1)^*$$

Հարկ է նշել, որ խնդրի այս տեսքը ամենաընդհանուրը չէ, քանի որ կարող է պահանջվել մինիմալացնել նպատակային ֆունկցիան, սահմանափակումները կարող են լինել հավասարությունների տեսքով, իսկ փոփոխականների վրա կարող է դրված չլինել նշանի սահմանափակում: Սակայն $\langle c,x\rangle$ ֆունկցիայի մինիմալացումը համարժեք է բացասական -$\langle c,x\rangle$ ֆունկցիայի մաքսիմալացմանը, հավասարությունը կարելի է փոխարինել երկու անհավասարություններով, իսկ նշանի սահմանափակում չունեցող փոփոխականը կարելի է ներկայացնել երկու դրական փոփոխականների տարբերությամբ: Այդ տեսքով տրված խնդիրը ընդունված է անվանել գծային ծրագրման ընդհանուր կամ ստանդարտ խնդիր:

Գծային ծրագրման խնդիրների կարևորագույն հատկություններից է այդպես կոչված երկակիությունը:

Տրված (4.2.1) կամ (4.1.1)* ստանդարտ խնդրի համար սահմանենք երկակի խնդիր հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min, \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j,\ j = 1, 2, \ldots, n, \\ y_i \ge 0, i = 1, 2, \ldots, m \end{cases} \tag{4.2.2}$$

կամ, համառոտ տեսքով՝

$$\begin{cases} \langle b, y \rangle \to \min, \\ A^T y \ge c, \\ y \ge 0. \end{cases} \tag{4.2.2*}$$

Կարելի է ցույց տալ, որ իր հերթին (4.2.1)* խնդիրը (4.2.2)* խնդրի համար երկակի խնդիր է: Իրոք, բերելով (4.2.2)* խնդիրը (4.2.1)* խնդրի տեսքի, կստանանք՝

$$\begin{cases} -\langle b, y \rangle \to \max, \\ -A^T y \le -c, \\ y \ge 0: \end{cases}$$

Այս խնդրի համար կազմենք երկակի խնդիրը՝

$$\begin{cases} -\langle c, x \rangle \to \min, \\ -Ax \ge -b, \\ x \ge 0: \end{cases}$$

Ակնհայտ է, որ այս խնդիրը համընկնում է (4.2.1)* խնդրին: Այսպիսով կարելի է խոսել երկակի խնդիրների զույգերի մասին, չնշելով, հիմնական թե երկակի խնդիր է:

Այժմ բերենք մի քանի հատկություններ, որոնք արտահայտում են երկակի խնդիրների փոխկապվածությունը: (4.2.1) և (4.2.2) խնդիրների թույլատրելի բազմությունները նշանակենք համապատասխանաբար X_1-ով և X_2-ով՝

$$X_1 = \left\{ x \in R_+^n : Ax \le b \right\},$$
$$X_2 = \left\{ y \in R_+^m : A^T y \ge c \right\}:$$

Լեմ 4.2.1: Ցանկացած $x \in X_1$, $y \in X_2$ համար

$$\langle c, x \rangle \le \langle b, y \rangle : \tag{4.2.3}$$

<u>Ապացույց:</u> Քանի որ $x \in X_1$, $y \in X_2$, ապա՝

$$\langle c, x \rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i) x_j = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) y_i \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = \langle b, y \rangle :$$

Լեմ 4.2.2: Եթե երկակի խնդիրներից որևէ մեկը թույլատրելի է, ապա մյուս խնդիրը սահմանափակ է:

<u>Ապացույց:</u> Դիցուք (4.2.1) խնդիրը թույլատրելի է, այսինքն գոյություն ունի որևէ $x' \in X_1$: Այդ դեպքում բոլոր $y \in X_2$ համար (4.2.3) անհավասարությունից կհետևի, որ

$$\langle b, y \rangle \ge \langle c, x' \rangle,$$

այսինքն, $\langle b, y \rangle$ ֆունկցիան սահմանափակ է ներքևից: Համանմանորեն, եթե (4.2.2) խնդիրը թույլատրելի է, ապա $\langle c, x \rangle$ ֆունկցիան սահմանափակ է վերևից:

Լեմ 4.2.3: Եթե գոյություն ունեն այնպիսի $x^0 \in X_1$, $y^0 \in X_2$, որ $\langle c, x^0 \rangle = \langle b, y^0 \rangle$, ապա x^0-ն (4.2.1) խնդրի, իսկ y^0-ն (4.2.2) խնդրի լուծումներն են:

<u>Ապացույց:</u> (4.2.3) անհավասարությունից հետևում է, որ բոլոր $x \in X_1$ համար

$$\langle c, x \rangle \le \langle b, y^0 \rangle = \langle c, x^0 \rangle,$$

այսինքն x^0-ն (4.2.1) խնդրի լուծումն է: Նույն եղանակով ցույց է տրվում, որ y^0-ն (4.2.2) խնդրի լուծումն է:

Լեմ 6.4: Եթե երկակի խնդիրների զույգից որևէ մեկը թույլատրելի չէ, ապա մյուս խնդիրը անսահմանափակ է:

Ապացույց: Դիցուք (4.2.1) խնդիրը թույլատրելի չէ: Դա նշանակում է, որ $Ax \le b, x \ge 0$ անհավասարությունների համակարգը անհամատեղելի է: Ըստ թեորեմ 2.2.13 (Ֆարկաշի լեմի տարբերակ) այդ դեպքում ոչ բացասական լուծում ունի հետևյալ համակարգը՝

$$A^T y \ge 0, \langle b, y \rangle < 0 \qquad (4.2.6)$$

Դիցուք, (4.2.2) խնդիրը թույլատրելի է և $y^0 \in X_2$: Կազմենք հետևյալ վեկտորը՝ $y' = y^0 + \alpha \bar{y}$, որտեղ $\bar{y}$-ը (4.2.6) համակարգի ոչ բացասական լուծում է, իսկ α-ն դրական թիվ է: Պարզ է, որ

$$A^T y' = A^T y^0 + \alpha A^T \bar{y} \ge c$$

ցանկացած α դրական թվի համար, այսինքն, $y' \in X_2$: Մյուս կողմից

$$\langle b, y' \rangle = \langle b, y^0 \rangle + \alpha \langle b, \bar{y} \rangle :$$

Այսպիսով, α-ի աճմանը զուգընթաց, նպատակային ֆունկցիայի արժեքը կարելի է դարձնել ցանկացած չափով փոքր: Հետևաբար, (4.2.2) խնդիրը անսահմանափակ է: Ուստի, եթե (4.2.1) խնդիրը թույլատրելի չէ, ապա կամ (4.2.2) խնդիրը թույլատրելի չէ, կամ, եթե թույլատրելի է, ապա անսահմանափակ է:

4.2.2 և 4.2.4 լեմերից հետևում է, որ գծային ծրագրման երկակի խնդիրներից մեկը թույլատրելի է և սահմանափակ այն, և միայն այն դեպքում, երբ թույլատրելի է և սահմանափակ իր երկակի խնդիրը: Հաջորդ հատկությունը նույնպես ցույց է տալիս երկակի խնդիրների սերտ կապվածությունը:

Թեորեմ 4.2.1: Եթե գծային ծրագրման երկակի խնդիրներից մեկն ունի լուծում, ապա մյուս խնդիրը նույնպես ունի լուծում:

Ապացույց: Գծային ծրագրման երկակի խնդիրների համար կազմենք Լագրանժի ֆունկցիաները ըստ (4.1.2) բանաձևի՝

$$L_1(x,\lambda)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j),$$

$$L_2(y,\mu)=-\sum_{i=1}^{m}b_iy_i+\sum_{j=1}^{n}\mu_j(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i-c_j):$$

Քանի որ $x=(x_1,x_2,...,x_n)\geq 0$ և $\mu=(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)\geq 0$, ինչպես նաև $y=(y_1,y_2,...,y_m)\geq 0$ և $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)\geq 0$ փոփոխականները միևնույն չափողականության են և բավարարում են նույն ոչ բացասական լինելու պայմանին, ապա, μ-ի փոխարեն վերցնելով x-ը իսկ λ-ի փոխարեն՝ y-ը, կստանանք՝

$$L_1(x,y)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=1}^{m}y_i(b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j),\ =\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=1}^{m}b_iy_i-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_ia_{ij}y_j,$$

$$L_2(y,x)=-\sum_{i=1}^{m}b_iy_i+\sum_{j=1}^{n}x_j(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i-c_j)=-\sum_{i=1}^{m}b_iy_i+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_ia_{ij}y_j-\sum_{j=1}^{n}x_jc_j:$$

Այսինքն՝

$$L_1(x,y)=-L_2(y,x):$$

Հետևաբար, եթե մի խնդրի Լագրանժի ֆունկցիան ունի թամբակետ, ապա մյուսը նույնպես ունի թամբակետ: Մնում է կիրառել թեորեմ 4.1.1-ը:

Լեմ 4.2.5: Եթե $(x^0,y^0)-$ն

$$Ax\leq b, A^T\geq c, x\geq 0, y\geq 0, \tag{4.2.7}$$

$$\langle c,x\rangle\geq\langle b,y\rangle \tag{4.2.8}$$

համակարգի լուծումն է, ապա x^0-ն (4.2.1) իսկ y^0-ն՝ (4.2.2) խնդիրների լուծումներն են:

<u>Ապացույց:</u> Քանի որ x^0-ն և y^0-ն բավարարում են (4.2.7) անհավասարություններին, ապա $x^0\in X_1$, $y^0\in X_2$: Հետևաբար, ըստ (4.2.3) անհավասարության՝

$$\langle c, x^0 \rangle \le \langle b, y^0 \rangle:$$

(4.2.8) անհավասարության հետ մեկտեղ ստանում ենք, որ

$$\langle c, x^0 \rangle = \langle b, y^0 \rangle:$$

Կիրառելով լեմ 4.2.3 –ը, ստանում ենք լեմի պնդումը:

Թեորեմ 4.2.2: Եթե գծային ծրագրման (4.2.1) և (4.2.2) երկակի խնդիրների զույգից յուրաքանչյուրը թույլատրելի է, ապա երկուսն էլ ունեն լուծում, ընդ որում խնդիրների նպատակային ֆունկցիաների էքստրեմալ արժեքները հավասար են:

Ապացույց: Նախորդ լեմից հետևում է, որ թեորեմը ապացուցելու համար բավարար է ապացուցել, որ (4.2.7), (4.2.8) համակարգը ունի լուծում: Այդ անհավասարությունների համակարգը կարելի է գրել մատրիցային տեսքով՝

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^T \\ -c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} b \\ -c \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad x \ge 0, y \ge 0: \tag{4.2.9}$$

Դիցուք թեորեմի պնդումը ճիշտ չէ և (4.2.9) համակարգը լուծում չունի: Այդ դեպքում, ըստ թեորեմ 2.2.13 (Ֆարկաշ) լուծում պետք է ունենա հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{pmatrix} A^T & 0 & -c \\ 0 & -A & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \\ u \end{pmatrix} \ge 0, \tag{4.2.10}$$

$$\langle v, b \rangle - \langle w, c \rangle < 0, \quad v \ge 0, w \ge 0, u \ge 0:$$

Այստեղ v-ն m-չափանի վեկտոր է, w- ն n-չափանի է, իսկ u-ն թիվ է: (4.2.10) համակարգը կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝

$$A^T v - uc \geq 0, -Aw + ub \geq 0, \langle v, b \rangle - \langle w, c \rangle < 0, \tag{4.2.11}$$

$$v \geq 0, w \geq 0, u \geq 0:$$

Ցույց տանք, որ այս համակարգը լուծում չունի (անհամատեղելի է):

Դիցուք $x \in X_1$ և $y \in X_2$ թույլատրելի վեկտորներ են: Այդ դեպքում՝

$$\langle b, v \rangle \geq \langle Ax, v \rangle = \langle A^T v, x \rangle \geq u \langle c, x \rangle,$$

$$\langle w, c \rangle \leq \langle w, A^T y \rangle = \langle Aw, y \rangle \leq u \langle b, y \rangle,$$

այսինքն՝

$$\langle v, b \rangle \geq u \langle c, x \rangle, \ \langle w, c \rangle \leq u \langle y, b \rangle:$$

Առաջին անհավասարությունից հանելով երկրորդը, ստանում ենք՝

$$0 > \langle b, v \rangle - \langle c, w \rangle \geq u(\langle c, x \rangle - \langle b, y \rangle,$$

որտեղից $u > 0$:

Նշանակենք՝ $\bar{v} = {}^{v}\!/_{u}$ և $\bar{w} = {}^{w}\!/_{u}$: (4.2.11) անհավասարություններից ստանում ենք՝

$$\begin{aligned} &A^T \bar{v} \geq c, \bar{v} \geq 0, \\ &A\bar{w} \leq b, \bar{w} \geq 0, \\ &\langle \bar{w}, c \rangle < \langle \bar{v}, b \rangle: \end{aligned}$$

Ստացանք, որ $\bar{v}$-ն (4.2.2) խնդրի լուծումն է, իսկ $\bar{w}$-ն (4.2.1) խնդրի լուծումն է: Սակայն վերջին անհավասարությունը հակասում է լեմ 1-ի :

Այսպիսով, ստացված հակասությունը ապացուցում է, որ (4.2.7)-ն ու (4.2.8)-ը համատեղելի է և, ըստ լեմ 4.2.4-ի երկու խնդիրն էլ ունեն լուծում:

Գծային ծրագրման խնդրի լուծման գոյության մասին կարելի է խոսել միայն այն դեպքում, երբ խնդիրը սահմանափակ է և թույլատրելի: Նախորդ թեորեմից հետևում է, որ այդ պայմանները նաև բավարար պայմաններ են:

Թեորեմ 4.2.3: Որպեսզի գծային ծրագրման խնդիրը ունենա լուծում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ խնդիրը լինի սահմանափակ և թույլատրելի:

Ապացույց: Անհրաժեշտությունը ակնհայտ է: Բավարարությունը ցույց տալու համար դիտարկենք գծային ծրագրման ընդհանուր (4.2.1) խնդիրը: Եթե երկակի (4.2.2) խնդիրը լինի ոչ թույլատրելի, ապա (4.2.1) խնդիրը ըստ լեմ 4.2.5-ի կլինի անսահմանափակ: Այսպիսով երկակի խնդիրները երկուսն էլ թույլատրելի են, և, ըստ նախորդ թեորեմի, (4.2.1) խնդիրը ունի լուծում:

4.3 ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Օրինակ 4.3.1: Դիցուք որևէ ձեռնարկություն կարող է արտադրել n տեսակի ապրանքներ: Այդ տեսականին արտադրելու համար օգտագործվում են m տեսակի նյութեր կամ միջոցներ: Նշանակենք a_{ij}-ով j-րդ տեսակի արտադրանքի մեկ միավորում i-րդ նյութի պարունակությունը, իսկ b_i-ով այդ նյութի ամբողջ քանակը: c_j-ով $(j=1,2,...,n)$, նշանակենք j -րդ արտադրանքի միավորից ստացվող եկամուտը: Եթե ձեռնարկությունը որոշի j-րդ արտադրանքից արտադրել x_j քանակ, ապա նրա ընդհանուր եկամուտը կկազմի $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ գումար: $(x_1, x_2, ..., x_n)$ վեկտորը արտադրելու համար j-րդ նյութի ծախսը կկազմի $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$:

Դրվում է հետևալ խնդիրը՝ օգտագործելով եղած պաշարները, արտադրել այնպիսի $(x_1, x_2, ..., x_n)$ վեկտոր, որ ընդհանուր եկամուտը լինի մաքսիմալ: Այսպիսով, մենք գալիս ենք հետևյալ խնդրի՝

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i=1,2,...,m \\ x \ge 0 : \end{cases}$$

Օրինակ 4.3.2:. Տրանսպորտային խնդիր: Դիցուք որևէ ձեռնարկություն իր արտադրանքը պահեստավորել է m հատ պահեստներում և պետք է այն առաքի n հատ խանութներ: Մեկ միավոր արտադրանքի տեղափոխման ծախսերը i-րդ պահեստից j-րդ խանութ նշանակենք c_{ij}, $(i=1,2,...,m; j=1,2,...,n)$: Դիցուք i-րդ պահեստի պարունակությունը A_i-է, իսկ j-րդ խանութի պահանջարկը B_j հարկավոր է որոշել i -րդ պահեստից j -րդ խանութ տեղափոխվող արտադրանքի x_{ij} քանակները: Տեղափոխման ընդհանուր ծախսերը կազմում են $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$, իսկ սահմանափակումները որոշվում են պահեստների պաշարներով և խանութների պահանջարկով: Այսպիսով ստանում են գծային ծրագրման հետևալ խնդիրը՝

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge B_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le A_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ x \ge 0 : \end{cases} :$$

Ակնհայտ է, որ խնդիրը թույլատրելի է միայն $\sum_{i=1}^{m} A_i \ge \sum_{j=1}^{n} B_j$ պայմաններում:

Օրինակ 4.3.3: Շրջիկ վաճառականի խնդիր: Դիցուք շրջիկ վաճառականը պետք է այցելի n հատ քաղաքներ, ընդ որում յուրաքանչյուր քաղաքն այցելում է մեկ անգամ: i-րդ քաղաքից j-րդ քաղաք տեղափոխվելու ծախսերը նշանակենք c_{ij}-ով: Վաճառականի յուրաքանչյուր երթուղի կարելի է ներկայացնել որպես մի տեղափոխություն n թվերից՝

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & . & . & . & n \\ i_1 & i_2 & . & . & . & i_n \end{pmatrix}:$$

Այդ երթուղու ծախսերը կկազմեն՝

$$c_p = c_{i_1} + c_{i_2} + \ldots + c_{i_n} :$$

Փաստորեն սա կոմբինատորիկ խնդիր է: Եթե նշանակենք P -ով n էլեմենտներից բոլոր տեղափոխությունների բազմությունը (որի հզորությունը $n!$-է), ապա կստանանք հետևյալ խնդիրը՝

$$\max_{p \in \mathrm{P}} c_p :$$

Այս խնդրին կարելի է մոտենալ նաև այլ տեսանկյունից: Ներմուծենք x_{ij} փոփոխականներ $(i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, n)$, որոնք հավասար են 1-ի, եթե վաճառականը i-րդ քաղաքից գնում է j -րդ քաղաք, և 0 այլ դեպքում: Քանի որ վաճառականը յուրաքանչյուր քաղաք մտնում և դուրս է գալիս մեկ անգամ, ապա x_{ij} -երը պետք է բավարարեն հետևյալ պայմաններին՝

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, 2, \ldots, n:$$

Այս պայմաններին բավարարող երթուղու ընդհանուր ծախսը հավասար կլինի

$$\sum_{i=1}^{n} \ \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} :$$

Այսպիսով ստանում ենք հետևյալ խնդիրը՝

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \ \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = 1, 2, \ldots, n, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, 2, \ldots, n, \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \end{cases}$$

որը տրանսպորտային խնդրի մասնավոր դեպքն է:

4.4. ԼՈՒԾՄԱՆ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐ: ՍԻՄՊԼԵՔՍ – ՄԵԹՈԴ

Այժմ տեսնենք, թե ինչպես կարելի է գտնել գծային ծրագրման խնդրի լուծումը: Դիցուք տրված է գծային ծրագրման ընդհանուր խնդիրը՝

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = 1, 2, ..., m \ : \\ x \ge 0 \end{cases} \tag{4.4.1}$$

Տրված սահմանափակումներից յուրաքանչյուրը որոշում է R^n տարածության մի կիսատարածություն, հետևաբար թույլատրելի բազմությունը կիսատարածությունների հատում է: Քանի որ կիսատարածությունը ուռուցիկ բազմություն է, ապա թույլատրելի բազմությունը իրենից ներկայացնում է ուռուցիկ բազմություն: Այդ բազմությունը նշանակենք X –ով, այսինքն՝ $X = \left\{ x \in R_+^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = 1, 2, ..., m \right\}$, իսկ X բազմության ծայրակետերի բազմությունը՝ X^0 -ով:

Թեորեմ 4.4.1: Եթե (4.4.1) խնդիրը թույլատրելի է և սահմանափակ, ապա նպատակային ֆունկցիան հասնում է իր էքստրեմալ արժեքներին X բազմության ծայրակետերում:

<u>Ապացույց:</u> Քանի որ խնդիրը ենթադրվել է թույլատրելի և սահմանափակ, ապա, ըստ 6.3 թեորեմի, գոյություն ունի այդ խնդրի $x^0 \in X$ լուծումը: Դիցուք X -ը սահմանափակ բազմություն է: Այս դեպքում, ըստ 2.2.2, 2.2.7 և 2.2.8 թեորեմների, $x^0 \in X$ կետը կարելի է ներկայացնել X բազմության վերջավոր թվով ծայրակետերի ուռուցիկ գծային կոմբինացիայի տեսքով՝

$$x^0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i, \ \ x^i \in X^0, \ \lambda_i > 0, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \ \ i = 1, 2, ..., k :$$

Ըստ ենթադրության, $\left\langle c, x^0 \right\rangle \ge \left\langle c, x^i \right\rangle$, $i = 1, 2, ..., k$: Եթե այս անհավասարություններից առնվազն մեկը լինի խիստ, ապա կստանանք հակասություն՝

$$\left\langle c, x^0 \right\rangle = \left\langle c, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left\langle c, x^i \right\rangle < \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left\langle c, x^0 \right\rangle = \left\langle c, x^0 \right\rangle,$$

Հետևաբար՝ $\left\langle c, x^0 \right\rangle = \left\langle c, x^i \right\rangle$, , $i = 1, 2, ..., k$, այսինքն՝ $\max_{x \in X} \left\langle c, x \right\rangle = \max_{x \in X^0} \left\langle c, x \right\rangle$:

Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ X-ը սահմանափակ բազմություն չէ: Դիցուք $L = \left\{ x \in R^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = a \right\}$ հիպերհարթությունն այնպիսին է, որ $x^0 \notin L$ և $x^0 \in X \bigcap P$, որտեղ $P = \left\{ x \in R^n : \sum_{i=1}^{n} x_i \leq a \right\}$ (այդպիսի հիպերհարթություն գոյություն ունի, բավական է վերցնել $a > \sum_{i=1}^{n} x_i^0$): Քանի որ $\bar{X} = X \bigcap P$ բազմությունը սահմանափակ է (այդ բազմության կետերը բավարարում են $0 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \leq a$ պայմանին), ապա, ինչպես և նախորդ դեպքում, x^0-ն կարելի է ներկայացնել $\bar{X}$ բազմության վերջավոր թվով ծայրակետերի ուռուցիկ գծային կոմբինացիայի տեսքով՝

$$x^0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i, \quad x^i \in \bar{X}^0, \; \lambda_i > 0, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \; i = 1, 2, ..., k:$$

Այստեղ բոլոր $x^i, i = 1, 2, ..., k$ ծայրակետերը չեն կարող պատկանել L-ին, այլապես կստանանք՝ $x^0 \in L$, ինչը հակասում է մեր ենթադրությանը a թվի վերաբերյալ: Հետևաբար, առնվազն մեկ x^i ծայրակետի համար $x^i \in X^0$ և, ինչպես և վերևում, կստանանք, որ $\left\langle c, x^0 \right\rangle = \left\langle c, x^i \right\rangle$ և $\max_{x \in X} \left\langle c, x \right\rangle = \max_{x \in X^0} \left\langle c, x \right\rangle$:

Այսպիսով, խնդիրը լուծելու համար հարկավոր է գտնել թույլատրելի բազմության բոլոր ծայրակետերը, հաշվել նպատակային ֆունկցիայի արժեքը այդ կետերում և գտնել էքստրեմալ արժեքը:

Սիմպլեքս–մեթոդի էությունը կայանում է հետևալում: Նախ գտնում ենք թույլատրելի բազմության որևէ գագաթ և ստուգում այդ գագաթին կից բոլոր գագաթները: Եթե այդ գագաթներից որևէ մեկում ֆունկցիայի արժեքը ավելի մեծ է, ապա տեղափոխվում ենք այդ գագաթ և ստուգում դրա բոլոր կից գագաթները: Այս պրոցեսը շարունակվում է այնքան ժամանակ, մինչև հասնենք մի գագաթի, որտեղ նպատակային ֆունկցիայի արժեքը ավելի բարձր է, քան բոլոր կից գագաթներում: Քանի որ գծային ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումը նաև գլոբալ էքստրեմում է, ապա լուծումը կլինի հենց այդ գագաթում: Թույլատրելի բազմության գագաթների թիվը վերջավոր է, հետևաբար այս պրոցեսը կավարտվի վերջավոր թվով քայլերում:

Այժմ անցնենք սիմպլեքս–մեթոդի ֆորմալ նկարագրությանը: Դիտարկենք սահմանափակումների հետևյալ համակարգը`

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = 1, 2, ..., m \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0: \end{cases} :$$

Վերջինս համարժեք է հետևյալ համակարգին`

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + u_i = b_i, i = 1, 2, ..., m \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0; u_1 \ge 0, u_2 \ge 0, ... u_n \ge 0: \end{cases} ,$$

կամ`

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i = u_i, i = 1, 2, ..., m \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0; u_1 \ge 0, u_2 \ge 0, ... u_m \ge 0: \end{cases} :$$

Այս համակարգում x_j և u_i փոփոխականները չեն տարբերվում միմյանցից: Այսպիսով, ստանում ենք m հատ գծային հավասարում $n+m$ ոչ բացասական փոփոխականներով: Կազմենք այդպես կոչված սիմպլեքս-աղյուսակը`

x_1	x_2	.	.	.	x_n	1	
a_{11}	a_{12}	.	.	.	a_{1n}	$-b_1$	$=-u_1$
.	.	.	.	.	.	.	.
a_{m1}	a_{m2}	.	.	.	a_{mn}	$-b_m$	$=-u_m$
c_1	c_2	.	.	.	c_n	0	$=w$

:

Այստեղ $u_i, i=1,2,...,m$ փոփոխականները արտահայտված են $x_j, j=1,2,...,n$ փոփոխականներով: Սակայն, եթե մատրիցը չվերասեռված է, ապա ցանկացած m փոփոխականները կարելի է արտահայտել մնացած n փոփոխականների միջոցով:

Դիցուք այդ միջոցով ստացել ենք հետևյալ աղյուսակը՝

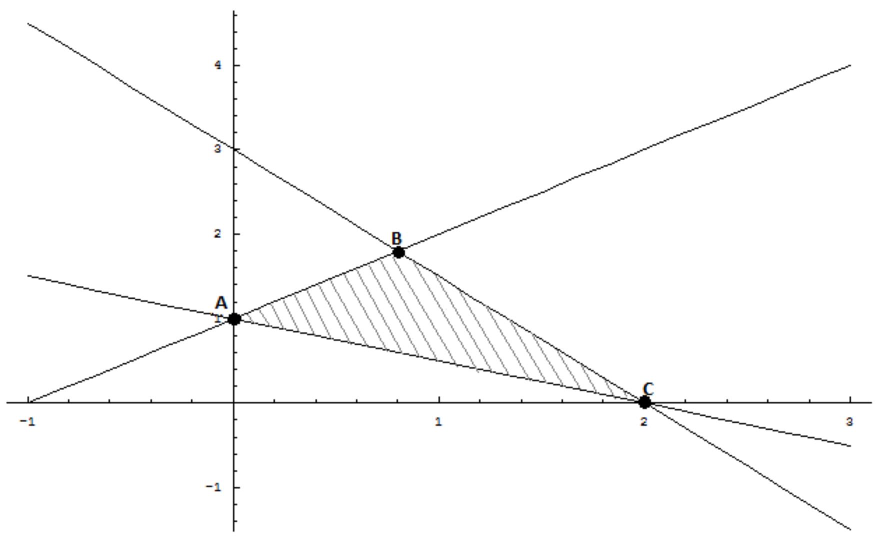
x'_1	x'_2	.	.	.	x'_n	1	
a'_{11}	a'_{12}	.	.	.	a'_{1n}	$-b'_1$	$=-u'_1$
.	.	.	.	.	.	.	.
a'_{m1}	a'_{m2}	.	.	.	a'_{mn}	$-b'_m$	$=-u'_m$
c'_1	c'_2	.	.	.	c'_n	δ	$=w$

:

Այստեղ վերջին աջ սյան բոլոր (բացի գուցե վերջինից) և ներքին տողի (բացի գուցե վերջինից) բոլոր թվերը ոչ դրական են: Այդ դեպքում այս աղյուսակը տալիս է խնդրի լուծումը: Իրոք, եթե բոլոր $x'_j, j=1,2,...,n$ փոփոխականները հավասարեցնենք 0-ի, ապա յուրաքանչյուր u'_i հավասար կլինի համապատասխան b'_i-ի, հետևաբար կստանա ոչ բացասական արժեք և այդ կետը կքնորոշի թույլատրելի բազմության մի գագաթ: Իրոք, քանի որ $x'_j, j=1,2,...,n$; $u_i, i=1,2,...,m$ փոփոխականներից յուրաքանչյուրի 0 արժեքը մի հիպերհարթության հավասարում է R^n-ում, ապա n հատի միաժամանակ 0 լինելը համարժեք է n հիպերհարթությունների հատման, այսինքն տալիս է մի կետ R^n-ում: Եթե մնացած փոփոխականները ոչ բացասական են, ապա այդ կետը թույլատրելի կետ է: Եվ , քանի որ այդ կետը ստացվում է թույլատրելի բազմությունը սահմանափակող հիպերհարթությունների հատումից, ապա այն թույլատրելի բազմության գագաթ է: Բացի դրանից, քանի որ բոլոր $c'_i, i=1,2,...,n$ թվերը ոչ դրական են, ապա $x'_j=0, j=1,2,...,n$ դեպքում $\sum_{i=1}^{n} c'_j x'_j$ նպատակային ֆունկցիան կստանա մաքսիմալ արժեք:

Բերենք սիմպլեքս-մեթոդի ալգորիթմի հիմնական քայլերը առանց ապացուցման:

1-ին քայլ: Դիցուք $-b_k$-ն աջ սյան ամենափոքր դրական թիվն է: A մատրիցի k-րդ տողում վերցնենք կամայական a_{kj_0} բացասական թիվ (եթե այդպիսի թիվ չկա, ապա խնդիրը թույլատրելի չէ): Ապա բոլոր $i \geq k$ համար, որոնց համար $-\frac{b_i}{a_{ij_0}}$ -ն բացասական է, վերցնենք այն i_0-ն, որի համար այդ հարաբերությունը ամենամեծն է: $a_{i_0 j_0}$-ն ձևափոխության հենքային տարրն է՝ i_0 տողի հավասարումից x_{j_0}-ն արտահայտվում է մնացած փոփոխականների միջոցով և փոխարինում է u_{i_0} փոփոխականին:



Նկար 4.4.1

2-րդ քայլ: Դիցուք c_{j_0}-ն վերջին տողի ցանկացած դրական տարր է: Բոլոր i-երի համար, որոնց համար $-\frac{b_i}{a_{ij_0}}$-ն բացասական է (եթե այդպիսիք չկան, ապա խնդիրը սահմանափակ չէ) վերցնենք այն i_0-ն, որի համար այդ հարաբերությունը ամենամեծն է: Եվ նորից i_0 տողի հավասարումից x_{j_0}-ն արտահայտենք մյուս փոփոխականներով:

Օրինակ 4.4.1: Դիտարկենք հետևյալ օրինակը.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \to \max \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases} \quad :$$

Քանի որ այս խնդրի փոփոխականները ընդամենը երկուսն են, ապա այն կարելի է լուծել նաև գրաֆիկորեն: Կոորդինատային հարթության վրա անցկացնենք $3x_1 + 2x_2 = 6$, $x_1 + 2x_2 = 2$ և $-x_1 + x_2 = 1$ ուղիղները և գտնենք խնդրի թույլատրելի բազմությունը: Գծագրի վրա այն գծանշված տիրույթն է: Նպատակային ֆունկցիան իր մաքսիմալ արժեքը ընդունում է թույլատրելի բազմության A, B, C գագաթներից որևէ մեկում: Համեմատելով $A(0,1); B\left(4/5, 9/5\right); C(2,0)$ գագաթներում նպատակային ֆունկցիայի արժեքները, կստանանք օպտիմալ լուծումը B գագաթում՝ $x_1^0 = 4/5, x_2^0 = 9/5$, իսկ նպատակային ֆունկցիայի մաքսիմալ արժեքը՝ $13/5$:

Այժմ նույն խնդիրը լուծենք սիմպլեքս-եղանակով: Կազմենք խնդրի սիմպլեքս աղյուսակը՝

x_1	x_2	1	
3	2	-6	$= -u_1$
-1	-2	2	$= -u_2$
-1	1^*	-1	$= -u_3$
1	1	0	w

Այս աղյուսակում որպես հենքային տարր ընտրենք աստղանիշով նշվածը, այսինքն տեղերով փոխենք x_2 -ը և u_3 -ը: Թվաբանական գործողություններից հետո կստանանք հետևյալ աղյուսակը՝

x_1	u_3	1	
5^*	-2	-4	$=-u_1$
-3	2	0	$=-u_2$
-1	1	-1	$=-x_2$
2	-1	1	w

Այս աղյուսակը արդեն տալիս է թույլատրելի կետ, քանի որ երրորդ սյունակի բոլոր սարրերը ոչդրական են: Վերջին տողում ունենք մեկ դրական թիվ՝ 2 թիվն է: Որպես ձևափոխության տարր պետք է ընտրենք աստղանիշով նշվածը: Նոր աղյուսակը կունենա հետևյալ տեսքը՝

u_1	u_3	1	
$1/5$	$-2/5$	$-4/5$	$=-x_1$
$3/5$	$4/5$	$-12/5$	$=-u_2$
$1/5$	$3/5$	$-9/5$	$=-x_2$
$-2/5$	$-1/5$	$13/5$	

Ստացված աղյուսակը տալիս է խնդրի լուծումը: Իրոք, այստեղ երրորդ սյունակը և վերջին տողը ոչ դրական են: Վերցնելով $u_1 = 0, u_3 = 0$ կստանանք $x_1^0 = 4/5$, $x_2^0 = 9/5$ և $w = 13/5$: Այս լուծումը, իհարկե, համընկնում է գրաֆիկորեն ստացված լուծման հետ:

4.5. ԴԻՍԿՐԵՏ ԾՐԱԳՐՈՒՄ

Դիսկրետ ծրագրման տեսությունը ուսումնասիրում է մաթեմատիկական ծրագրման ընդհանուր խնդրի այն մասնավոր դեպքերը, երբ փոփոխականների մի մասը, կամ բոլորը, կարող են ընդունել միայն վերջավոր թվով արժեքներ: Այդպիսի մոդելներ առաջանում են տարբեր բնագավառներում, երբ, օրինակ, ստացվող լուծումը պետք է արտահայտվի ամբողջ թվերով՝ ամբողջարժեք ծրագրում: Այդպիսի խնդրի օրինակ է նաև նախորդ բաժնում դիտարկված նշանակումների խնդիրը: Ամբողջարժեք ծրագրման խնդիրների լուծման թվացյալ ամենապարզ եղանակը՝ կլորացումը, հաճախ բերում է օպտիմալ լուծումից շատ հեռու արդյունքների: Սա է պատճառը, որ դիսկրետ ծրագրումը ձևավորվել է որպես առանձին տեսություն:

Կիրառությունների տեսանկյունից շատ կարևոր դաս են կազմում գծային ծրագրման ամբողջարժեք խնդիրները: Դիցուք տրված է գծային ծրագրման 4.2.1 խնդիր՝

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = 1,...,m, \\ x_j \ge 0,\ j = 1,...,n: \end{cases}$$

Ընդ որում պահանջվում է, որ փոփոխականները ընդունեն միայն ամբողջ արժեքներ: Նշանակենք G^c-ով $G = \left\{ x \in R_+^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = 1,...,m, \right\}$ բազմության բոլոր ամբողջ բաղադրիչներով վեկտորների բազմությունը և $C\left(G^c\right)$-ով G^c բազմության ուռուցիկ թաղանթը: Քանի որ գծային ծրագրման խնդիրների լուծումը ոչ մի սկզբունքային դժվարություն չի պարունակում, ուստի հաճախ ամբողջարժեք խնդիրների լուծումը բերվում է գծային ծրագրման խնդիրների լուծմանը:

Թեորեմ 4.5.1: Գծային ծրագրման ամբողջարժեք խնդիրների լուծումը համընկնում է

$$\langle c, x \rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$
$$x \in C\left(G^c\right):$$

գծային ծրագրման խնդրի լուծման հետ:

Ապացույցն անմիջականորեն հետևում է ուռուցիկ թաղանթի սահմանումից և 4.4.1 թեորեմից: Որոշ մասնավոր դեպքերում այս թեորեմը թույլ է տալիս անմիջապես ստանալ ամբողջարժեք խնդրի լուծումը լուծելով գծային ծրագրման խնդիր: Առանց ապացույցի (տես [13]) բերենք մեկ օրինակ:

Թեորեմ 4.5.2: Ցանկացած ամբողջ A_i և B_j գործակիցների դեպքում 4.3.2 տրանսպորտային խնդրի լուծումը ամբողջարժեք է անկախ նպատակային ֆունկցիայի գործակիցներից:

Ընդհանուր դեպքում 4.5.1 թեորեմի պնդումը ընկած է գծային ծրագրման ամբողջարժեք խնդիրների լուծման թվային ալգորիթմերի բավականաչափ մեծ խմբի՝ այդպես կոչված *կանոնավոր հատույթների* հիմքում: Ուրվագծորեն նկարագրենք կանոնավոր հատույթների եղանակը:

Դիցուք տրված է

$$\begin{cases} \langle c, x \rangle \to \max \\ x \in G^c : \end{cases}$$

գծային ծրագրման ամբողջարժեք խնդիրը և դիցուք

$$\begin{cases} \langle c, x \rangle \to \max \\ x \in G : \end{cases}$$

գծային ծրագրման խնդրի լուծումը՝ x^0-ն ամբողջարժեք չէ: Կանոնավոր հատույթ կանվանենք

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^1 x_j \le b^1$$

անհավասարությունը, եթե այն բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

$$1).\sum_{j=1}^{n} a_j^1 x_j^0 > b^1,$$

$$2).G^C \subseteq \left\{ x \in R^n : \sum_{j=1}^{n} a_j^1 x_j \le b^1 \right\}:$$

Կանոնավոր հատույթը ավելացվում է խնդրի սահմանափակումներին և լուծվում է գծային ծրագրման նոր խնդիր՝

$$\begin{cases} \langle c, x \rangle \to \max \\ x \in G \bigcap \left\{ x \in R^n : \sum_{j=1}^{n} a_j^1 x_j \le b^1 \right\} \end{cases}:$$

Եթե այս խնդրի լուծումը նորից ամբողջարժեք չէ, ապա կառուցվում է նոր կանոնավոր հատույթ և լուծվում հաջորդ խնդիրը: Այս գործընթացը շարունակվում է մինչև ամբողջարժեք լուծում ստանալը: Ներկայումս գոյություն ունեցող թվային ալգորիթմերը թույլ են տալիս տարրական գործողությունների միջոցով վերջավոր թվով քայլերով լուծել ամբողջարժեք խնդիրները:

Դիտարկենք դիսկրետ խնդիրների ևս մեկ եղանակ, որը կոչվում է *ճյուղերի և եզրերի եղանակ*: Դիցուք տրված է դիսկրետ խնդիր՝

$$\begin{cases} f(x) \to \max \\ x \in G \subseteq R^n \end{cases},$$

որտեղ G բազմությունը վերջավոր է: Ենթադրենք, որ մենք կարող ենք որևէ եղանակով գնահատել $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքը G բազմության վրա, այսինքն գտնել այնպիսի $\alpha(G)$ գնահատական (եզր), որ

$$f(x) \le \alpha(G), x \in G:$$

Եթե այժմ կարողանանք գտնել այնպիսի $x^0 \in G$, որ $f(x^0) = \alpha(G)$, ապա x^0-ն մեր խնդրի լուծումն է: Եթե ոչ, ապա տրոհում ենք G բազմությունը $G_1^1, G_2^1, ..., G_{k_1}^1$ բազմությունների (ճյուղավորում ենք խնդիրը) և գնահատում $f(x)$ ֆունկցիան $G_1^1, G_2^1, ..., G_{k_1}^1$ բազմությունների վրա: Ստանում ենք նոր գնահատականներ՝

$\alpha\left(G_1^1\right), \alpha\left(G_2^1\right), \ldots, \alpha\left(G_{k_1}^1\right)$: Քանի որ $G_i^1 \subseteq G$, ապա կարելի է սպասել, որ $\alpha\left(G_i^1\right) \leq \alpha\left(G\right), i = 1, 2, \ldots, k_1$: Դիցուք՝ $\alpha\left(G_{i_0}^1\right) = \max_{1 \leq i \leq k_1} \alpha\left(G_i^1\right)$: Եթե այժմ կարողանանք գտնել այնպիսի $x^0 \in G_{i_0}^1$, որ $f\left(x^0\right) = \alpha\left(G_{i_0}^1\right)$, ապա x^0-ն մեր խնդրի լուծումն է, այլապես այս գործընթացը պետք է շարունակել մինչև խնդրի լուծումը գտնելը:

ԲԱԶՄԱՆՊԱՏԱԿԱՅԻՆ ՕՊՏԻՄԱԼԱՑՈՒՄ

5.1. ԽՄԲԱՅԻՆ ԸՆՏՐՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ինչպես նշվել է ներածությունում, խմբային ընտրության խնդիրը որոշումներ ընդունելու ընդհանուր խնդրի այն մասնավոր դեպքն է, երբ ինչպես որոշումների բազմությունը, այնպես էլ նախընտրելիության հարաբերությունների թիվը վերջավոր են: Խմբային ընտրության խնդիրը կարելի է ներկայացնել հետևյալ մոդելի տեսքով՝ $\langle X, \succ_1, \succ_2, ..., \succ_n \rangle$, որտեղ՝ $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, իսկ նախընտրելիության հարաբերությունները ենթադրվում են թույլ կարգավորվածություններ X բազմության վրա:

Առաջին անգամ այս խնդիրը դիտարկվել է Էռոուի (Arrow) կողմից որպես որևէ դեմոկրատական երկրի ընտրական համակարգի մաթեմատիկական մոդել: Չնայած վերը նշված մոդելը շատ ավելի ընդհանուր է, սակայն մենք կպահպանենք Էռոուի մոտեցումները և ձևակերպումները:

Որոշումների բազմության $x_i, i = 1, 2, ..., m$ տարրերը անվանենք *թեկնածուներ*, իսկ նախընտրելիության $\succ_j, j = 1, 2, ..., n$ հարաբերությունները՝ *անհատական կարծիքներ:* Խնդիրը դրվում է հետևյալ կերպ: Ունենք m թեկնածու և n ընտրող: Ընտրողներից յուրաքանչյուրը արտահայտում է իր կարծիքը թեկնածուների վերաբերյալ՝ արդյունքում ստանում ենք n հատ նախընտրելիության հարաբերություն m թեկնածուների վերաբերյալ: Այդ անհատական կարծիքների հիման վրա հարկավոր է որոշել, թե ինչպիսին է ընտրողների հավաքական կարծիքը: Փաստորեն խնդիրը հետևյալն է՝ կառուցել արտապատկերում, որը X բազմության վրա անհատական կարգավորվածությունների ցանկացած $\{\succ_j\}_1^n$ համակարգին համապատասխանության մեջ կդնի մեկ կարգավորվածություն՝ $\succ$ -խմբային կարծիք: Այդ արտապատկերումը անվանում են ընտրական կանոնադրություն, կամ, ընդհանուր դեպքում, *խմբային ընտրության կանոն*:

Էռոուն առաջարկել է հինգ մինիմալ պայմաններ, որոնց ներըմբռնողական պատկերացումներով պետք է բավարարի արդարացի ընտրական կանոնադրությունը դեմոկրատական երկրներում: Այդ պայմանները անվանում են Էռոուի աքսիոմների համակարգ: Դրանք են՝

1).Խմբային ընտրության կանոնը միարժեքորեն որոշված է բոլոր հնարավոր անհատական կարծիքների $\{\succ_j\}_1^n$ համակարգերի համար:

2).*Մոնոտոնության աքսիոմ*: Եթե անհատական կարծիքների որևէ $\{\succ_j\}_1^n$ համակարգի և $x, y \in X$ թեկնածուների զույգի համար խմբային ընտրության կանոնի համաձայն $x \succ y$, ապա եթե անհատական կարծիքները փոխվեն այնպես, որ x-ը պարունակող զույգերի վերաբերյալ կարծիքները փոխվեն միայն ի օգուտ x-ի, իսկ մնացած կարծիքները չփոխվեն, ապա կանոնը նորից կհանգեցնի՝ $x \succ y$:

3).*Անկախություն չկապված այլընտրանքներից:* Եթե անհատական կարծիքների երկու համակարգերում $X^0 \subset X$ թեկնածուների ենթաբազմության վերաբերյալ բոլոր կարծիքները համընկնում են, ապա պետք է համընկնեն նաև խմբային կարծիքները:

4).*Բռնապետության արգելք:* Գոյություն չունի այնպիսի j_0 ընտրող, որ ցանկացած $x, y \in X$ զույգի համար $x \succ_{j_0} y$-ից հետևի՝ $x \succ y$:

5).*Պետության ինքնիշխանություն:* Ցանկացած $x,\ y \in X$ զույգի համար, եթե կանոնի համաձայն՝ $x \succ y$, ապա գոյություն ունի առնվազն մեկ՝ j_0 ընտրող, այնպես, որ՝ $x \succ_{j_0} y$:

Էռոուի հայտնի պարադոքսը կայանում է նրանում, որ այս աքսիոմները անհամատեղելի են՝ ցանկացած կանոն, որը բավարարում է առաջին երեք աքսիոմների, բերում է կամ բռնապետության, կամ ինքնիշխանության կորստի: Բերենք այդ արդյունքն առանց ապացուցման:

Թեորեմ 5.1.1: Գոյություն չունի կանոն, որը բավարարում է 1)-5) աքսիոմների համակարգին, եթե $n \geq 2, m \geq 3$:

Ընտրական կանոններից ամենաշատ կիրառվողը մեծամասնության կանոնն է: Այն կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ: Կամայական $x, y \in X$ զույգի համար նշանակենք՝

$$n_x = \left|\left\{ j : x \succ_j y \right\}\right|,\ n_y = \left|\left\{ j : y \succ_j x \right\}\right|,\ n_{xy} = \left|\left\{ j : x \sim_j y \right\}\right|:$$

Մեծամասնության կանոնը կձևակերպվի այսպես՝ $x \succ y$ այն, և միայն այն դեպքում, եթե՝ $n_x > n_y$: Հեշտ է տեսնել, որ մեծամասնության կանոնը չի բավարարում Էռոուի հենց առաջին աքսիոմին: Դիտարկենք հետևյալ օրինակը՝

$$x \succ_1 y \succ_1 z,$$
$$y \succ_2 z \succ_2 x,$$
$$z \succ_3 x \succ_3 y:$$

Ըստ մեծամասնության կանոնի, մենք կստանանք՝ $x \succ y,\ y \succ z,\ z \succ x$, այսինքն ոչ տրանզիտիվ հարաբերություն: Մեծամասնության կանոնը լիովին նկարագրվում է աքսիոմների հետևյալ համակարգով՝

Ա 1: Կանոնը միարժեքորեն որոշված է թեկնածուների ցանկացած $x, y \in X$ զույգի համար:

Ա 2: Կանոնը կախված չէ թեկնածուների անվանումներից:

Ա 3: Կանոնը կախված չէ ընտրողների անվանումներից:

Ա 4: Եթե որևէ $x, y \in X$ զույգի համար կանոնը որոշել է, որ $x \sim y$ և ընտրողներից մեկը փոխել է իր կարծիքն ի օգուտ x-ի, ապա կանոնը պետք է որոշի, որ $x \succ y$:

Թեորեմ 5.1.2: Միակ կանոնը, որը բավարարում է վերը բերված 4 աքսիոմի՝ մեծամասնության կանոնն է:

<u>Ապացույց:</u> Հեշտ է ստուգել, որ մեծամասնության կանոնը բավարարում է այս աքսիոմներին: Ցույց տանք, որ այն միակն է: Վերցնենք կամայական $x, y \in X$ զույգ: Քանի որ կանոնը կախված չէ ընտրողների անվանումներից, ապա կարող է կախված լինել միայն դրանց քանակից, այսինքն՝ n_x, n_y, n_{xy} թվերից: Դիցուք ինչ-որ կարծիքների $\{\succ_j\}_1^n$ համակարգի դեպքում՝ $n_x = n_y$: Այդ դեպքում, ըստ 2 աքսիոմի կանոնը պետք է պնդի, որ $x \sim y$: Այժմ, եթե որևէ ընտրող փոխի իր կարծիքն ի օգուտ x-ի, կստանանք՝ $n_x > n_y$ և ըստ 4 աքսիոմի, կանոնը պետք է որոշի, որ $x \succ y$: Ստանում ենք մեծամասնության կանոնը:

Դիտարկենք մի կանոն ևս, որը լայն կիրառություններ ունի փորձագիտական գնահատականների տեսությունում, սպորտի բնագավառում և այլն: Դա *Կոպլենդի կանոնն է*:

Դիցուք տրված է կարծիքների որևէ $\{\succ_j\}_1^n$ համակարգ: Յանկացած $x \in X$ նշանակենք՝

$$\alpha_j(x) = \left|\left\{y \in X : x \succ_j y\right\}\right|,$$
$$\beta_j(x) = \left|\left\{y \in X : y \succ_j x\right\}\right|$$

և կազմենք օգտավետության ֆունկցիա՝

$$u(x) = \sum_{j=1}^{n}\left(\alpha_j(x) - \beta_j(x)\right):$$

Ըստ Կոպլենդի կանոնի՝

$$x \succ y \Leftrightarrow u(x) > u(x):$$

Այս կանոնը, ի տարբերություն մեծամասնության կանոնի միշտ հանգեցնում է տրանզիտիվ լուծումների, սակայն չի բավարարում Էռոուի Ա.5 աքսիոմին:

Խմբային ընտրության տեսությունը հաճախ օգտագործվում է *փորձագիտական գնահատականների տեսության* շրջանակներում: Այն դեպքերում, երբ դժվար է ճշգրիտ գնահատական տալ այս կամ այն որոշմանը, կազմվում է տվյալ բնագավառի մասնագետների՝ փորձագետների խումբ, որոնցից յուրաքանչյուրն արտահայտում է իր կարծիքը և այդ կարծիքների հիման վրա ընդունվում է վերջնական որոշում:

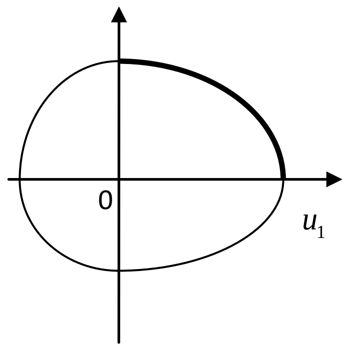
5.2. ՎԵԿՏՈՐԱԿԱՆ ՕՊՏԻՄԱԼԱՑՈՒՄ

Վեկտորական օպտիմալացման տեսությունը ուսումնասիրում է որոշումներ ընդունելու մոդելի այն մասնավոր դեպքը, երբ նախընտրելիության հարաբերությունների թիվը վերջավոր է և յուրաքանչյուրի համար գոյություն ունի համապատասխան օգտավետության ֆունկցիա: Այսպիսով, վեկտորական օպտիմալացման մոդելը կարելի է դիտարկել հետևյալ տեսքով՝ $\mathrm{M} = \langle X, u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x) \rangle$, որտեղ X-ը կամայական բազմություն է, իսկ $u_i(x),\ i = 1, 2, ..., n$ ֆունկցիաները՝ X-ի վրա որոշված իրականարժեք ֆունկցիաներ են: Հարկավոր է գտնել X բազմության կետ, որն ինչ-որ իմաստով մաքսիմալացնում է բոլոր $u_i(x), i = 1, 2, ..., n$ ֆունկցիաները միաժամանակ:

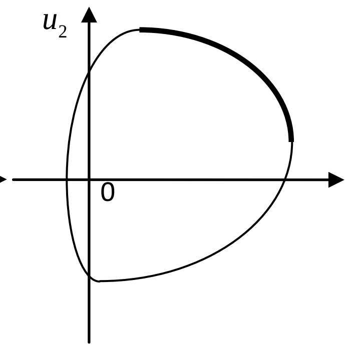
Կախված այն բանից, թե ինչ բնագավառների է վերաբերում վեկտորական օպտիմալացման խնդիրը և ինչ լրացուցիչ ինֆորմացիա կա այդ խնդրի վերաբերյալ, խնդրի լավագույն որոշումը կարելի է փնտրել ըստ օպտիմալության տարբեր սկզբունքների: Այստեղ կդիտարկվեն հայտնի սկզբունքներից մի քանիսը: Ամենաընդհանուր և կիրառվող սկզբունքներից է Պարետոի (Pareto) օպտիմալության սկզբունքը:

Սահմանում 5.2.1: $x^0 \in X$ կետն անվանում են *Պարետո-օպտիմալ,* եթե գոյություն չունի այնպիսի $x \in X$, որ $u_i(x) \geq u_i(x^0),\ i = 1, 2, ..., n$, ընդ որում այդ անհավասարություններից առնվազն մեկը խիստ է:

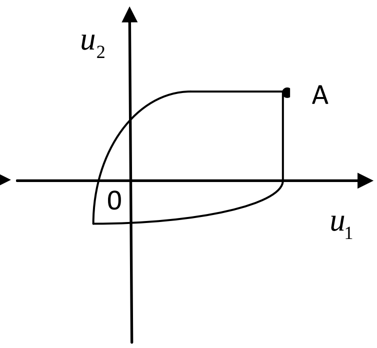
Գործնականում, այս սկզբունքով որոշվող կետերը հաճախ մի ընդարձակ բազմություն են կազմում, որն անվանում են Պարետո-բազմություն: Նկարներ 5.2.1 և 5.2.2-ում պատկերված են $n = 2$ դեպքում հաճախակի հանդիպող Պարետո-օպտիմալ բազմույուններին համապատասղանող u_1, u_2 օգտավետության ֆունկցիաների արժեքների բազմությունները: Նկար 5.2.3-ում պատկերված է այն դեպքը, երբ Պարետո-օպտիմալ բազմույունը բաղկացած է միակ կետից: Սա համապատասխանում է այն դեպքին, երբ գոյություն ունի այնպիսի $x^0 \in X$ կետ, որ $u_1\left(x^0\right) = \max\limits_{x \in X} u_1\left(x\right),\ u_2\left(x^0\right) = \max\limits_{x \in X} u_2\left(x\right)$: Այս դեպքում խնդիրը վերանում է վեկտորական օպտիմալացման խնդիր լինելուց:



Նկար 5.2.1



Նկար 5.2.2



Նկար 5.2.3

Փաստորեն, այս սկզբունքով որոշվում է ոչ թե լավագույն կետը, այլ այն կետերի բազմությունը, որտեղ հարկավոր է փնտրել լավագույնը՝ օգտվելով խնդրի վերաբերյալ ստացած լրացուցիչ տեղեկատվությունից: Այն խնդիրներում, որտեղ այդ լրացուցիչ տեղեկատվությունը առկա է, այսինքն հայտնի են օգտավետության ֆունկցիաների համեմատական կարևորությունները, այդ ֆունկցիաների արժեքները արտահայտված են նույն միավորներով, կամ բերված են նույն մասշտաբի, շատ կիրառելի է այդպես կոչված *սկալյար սկզբունքը* :

Սահմանում 5.2.2: Դիցուք՝ $\lambda = \left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\right) \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$: $x^0 \in X$ կետն անվանում են օպտիմալ ըստ $\lambda_i,\ i = 1, 2, ..., n$ կշիռներով սկալյար սկզբունքի, եթե բոլոր $x \in X$ կետերի համար՝

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\left(x^0\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\left(x\right):$$

Այս երկու սկզբունքները տրամագծորեն տարբեր են թվում, քանի որ առաջինի դեպքում դուք ոչինչ չգիտեք խնդրի վերաբերյալ, իսկ երկրորդում գիտեք գրեթե ամեն ինչ: Սակայն պարզվում է, որ այս երկու սկզբունքները ինչ-որ իմաստով համարժեք են:

Թեորեմ 5.2.1: Եթե որոշ $x^0 \in X$, $\lambda = \left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\right) > 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ համար՝

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\left(x^0\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\left(x\right),$$

ապա x^0-ն օպտիմալ է ըստ Պարետոի:

Ապացույց: Ենթադրենք հակառակը՝ դիցուք x^0-ն օպտիմալ չէ ըստ Պարետոի: Այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի $x \in X$, որ

$$u_i(x) \geq u_i(x^0),\ i = 1, 2, ..., n,$$

ընդ որում այդ անհավասարություններից առնվազն մեկը խիստ է: Այս անհավասարություններից յուրաքանչյուրը բազմապատկենք համապատասխան λ_i-ով և գումարենք: Քանի որ այդ անհավասարություններից առնվազն մեկը խիստ է, կստանանք խիստ անհավասարություն՝

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x) > \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x^0):$$

Սա հակասում է թեորեմի պայմանին:

Թեորեմ 5.2.2: Դիցուք X-ը ուռուցիկ բազմություն է, իսկ $u_i(x),\ i = 1, 2, ..., n$ ֆունկցիաները գոգավոր ֆունկցիաներ են: Այդ դեպքում, եթե x^0-ն օպտիմալ է ըստ Պարետոի, ապա գոյություն ունեն այնպիսի $\lambda_i \geq 0,\ i = 1, 2, ..., n$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, որ

$$\max_{x \in X} \sum_{i=1}^{n} u_i(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x^0):$$

Ապացույց: Կազմենք հետևյալ արտահայտությունը՝ $\left((u_1(x) - u_1(x^0)),\ (u_2(x) - u_2(x^0)), ...,\ (u_n(x) - u_n(x^0))\right)$: Ցանկացած ֆիքսած $x \in X$ կետի համար այն կարելի է դիտարկել որպես n-չափանի վեկտոր, այսինքն՝ կետ R^n-ից: Այդպիսի բոլոր հնարավոր վեկտորների բազմությունը նշանակենք V-ով՝

$$V = \left\{\left((u_1(x) - u_1(x^0)),\ (u_2(x) - u_2(x^0)), ...,\ (u_n(x) - u_n(x^0))\right) : x \in X\right\}:$$

Քանի որ ենթադրել ենք, որ x^0-ն օպտիմալ է ըստ Պարետոի, ապա այս վեկտորների մեջ դրական վեկտորներ չկան՝ $V \cap R_+^n = \varnothing$: $C(V)$-ով նշանակենք V բազմության ուռուցիկ թաղանթը: Ինչպես հայտնի է, ուռուցիկ թաղանթի ցանկացած կետ կարելի է ներկայացնել V բազմության ոչ ավելի, քան $n+1$ կետերի ուռուցիկ գծային կոմբինացիայի տեսքով (տես թեորեմ 2.1.1.)։ Դա նշանակում է, որ $C(V)$-ի ցանկացած y վեկտորի k-րդ բաղադրիչը $(k=1,2,...,n)$ ունի հետևյալ տեսքը՝

$$y_k = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \left(u_k(x_j) - u_k(x^0) \right),$$

որտեղ՝

$$x_j \in X;\ \alpha_j \geq 0;\ j = 1,2,...,n+1;\ \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j = 1:$$

Այստեղից՝

$$y_k = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j u_k(x_j) - \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j u_k(x^0) = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j u_k(x_j) - u_k(x^0):$$

Քանի որ ենթադրվել է, որ $u_i(x),\ i=1,2,...,n$ ֆունկցիաները գոգավոր են, ապա՝

$$\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j u_k(x_j) \leq u_k\left(\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j x_j \right):$$

Նշանակենք՝ $x' = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j x_j$: X-ը ուռուցիկ բազմություն է, հետևաբար, $x' \in X$: Այսպիսով ստանում ենք, որ ցանկացած $y \in C(V)$ համար գոյություն ունի $x' \in X$, այնպես, որ՝ $y_k \leq u_k(x') - u_k(x^0)$; $(k=1,2,...,n)$: Այստեղից հետևում է, որ եթե V բազմության մեջ չկան դրական վեկտորներ, ապա այդպիսիք չկան նաև $C(V)$-ում: Դա նշանակում է, որ $C(V) \cap R_+^n = \varnothing$:

Ինչպես $C(V)$ բազմությունը, այնպես էլ R^n-ը ուռուցիկ են: Հետևաբար, անջատելիության թեորեմի համաձայն, այդ երկու բազմությունները կարելի է անջատել կոորդինատների սկզբնակետով անցնող հիպերհարթությամբ (տես թեորեմ 2.1.5): Անալիտիկորեն դա նշանակում է, որ գոյություն ունեն այնպիսի $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ թվեր, որոնք միաժամանակ 0 չեն, որ

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i z_i \leq 0\ ,\quad z \in C(V)\,, \tag{5.2.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i z_i \geq 0, \quad z \in R_+^n :$$

Եթե վերջին անհավասարության մեջ տեղադրենք $e^i = (0,0,...,0,\underset{i}{1},0,...,0) \in R_+^n$ վեկտորները, ապա կստանանք՝ $\beta_i \geq 0,\ i = 1,2,...,n$: Այսպիսով, $\sum_{i=1}^{n}\beta_i > 0$: Նշանակենք՝ $\lambda_i = \frac{\beta_i}{\sum_{i=1}^{n}\beta_i}$: Բաժանելով (5.2.1) անհավասարությունը $\sum_{i=1}^{n}\beta_i$-ի վրա և որպես z վերցնելով V բազմության կետերը, կստանանք՝

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\left[u_k(x) - u_k(x^0)\right] \leq 0, \ \ x \in X :$$

Այստեղից՝

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i(x) \leq \sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i(x^0), \quad x \in X :$$

Հաշվի առնելով, որ $\lambda_i \geq 0,\ i = 1,2,...,n$, $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$, ստանում ենք պահանջվող թեորեմի պնդումը:

Այս երկու թեորեմները փաստորեն փակում են օպտիմալության սկզբունքների հարցը վեկտորական օպտիմալացման խնդիրներում: Իրոք, ցանկացած օպտիմալության սկզբունք պետք է հանգեցնի Պարետո-օպտիմալ կետի, սակայն ցանկացած Պարետո-օպտիմալ կետ կարելի է ստանալ համապատասխան կշիռներով սկալյար սկզբունքով:

Օրինակ 5.2.1: Ցանկացած արտադրական պրոցես ֆորմալ կարելի է նկարագրել (x, y) վեկտորների զույգով, որտեղ $x = (x_1, x_2,..., x_n)$–ը *ծախսերի վեկտորն* է, $y = (y_1, y_2,..., y_m)$-ը *արտադրանքի վեկտորը*: Այստեղ x_i-ն i-րդ տեսակի ծախսված ապրանքի քանակն է, y_j-ն j–րդ տեսակի արտադրանքի քանակն է: Որպես կանոն, եղած արտադրական տեխնոլոգիան հնարավորություն է տալիս իրագործել ոչ թե մեկ, այլ արտադրական պրոցեսների մի ամբողջ բազմություն, որոնցից յուրաքանչյուրը բնորոշվում է իր ծախսեր-արտադրանք վեկտորով: Նշանակենք T–ով բոլոր ծախսեր-արտադրանք վեկտորների բազմությունը, որոնք հնարավոր են տվյալ տեխնոլոգիայի պարագայում: Այսպիսով, T-ն R^{n+m} տարածության ենթաբազմություն է: Դիցուք $\alpha=\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right)$, $\beta=\left(\beta_1,\beta_2,...,\beta_m\right)$ վեկտորների բոլոր բաղադրիչները դրական են: (α,β) զույգի համար կազմենք՝

$$F_{\alpha,\beta}\left(x,y\right)=\langle\alpha,x\rangle+\langle\beta,y\rangle:$$

Եթե ենթադրենք, որ T-ն ուռուցիկ է, ապա տվյալ խնդրի համար վերը բերած թեորեմները կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ.

- *Ծախսեր-արտադրանք ցանկացած վեկտոր, որը մաքսիմալացնում է $F_{\alpha,\beta}\left(x,y\right)$ ֆունկցիան T բազմության վրա, Պարետո-օպտիմալ է:*
- *Եթե $\left(x,y\right)$ վեկտորը Պարետո-օպտիմալ է T-ում, ապա գոյություն ունեն այնպիսի α և β վեկտորներ, որ $\left(x,y\right)$-ը $F_{\alpha,\beta}\left(x,y\right)$ ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է:*

Այս պնդումների տնտեսագիտական մեկնաբանությունը հետևյալն է: Դիցուք α-ն և β-ն համապատասխան ապրանքների գներն են (α_i-ն i-րդ տեսակի ծախսված ապրանքի միավորի գինն է, β_j-ն j–րդ տեսակի արտադրանքի միավորի գինն է): Այս դեպքում $F_{\alpha,\beta}\left(x,y\right)$-ը կհանդիսանա (α,β) գներով (x,y) արտադրական պրոցեսի իրականացումից ստացված շահույթը: Այժմ նախորդ պնդումները կընդունեն հետևյալ տեսքը.

- *Ցանկացած արտադրական պրոցես, որը մաքսիմալացնում է շահույթը որևէ գների դեպքում, Պարետո-օպտիմալ է:*
- *Յուրաքանչյուր Պարետո-օպտիմալ արտադրական պրոցես մաքսիմալացնում է շահույթը գների որևէ վեկտորի դեպքում:*

5.3. ԳՈՐԾԱՐՔՆԵՐԻ ԽՆԴԻՐ

Այժմ դիտարկենք վեկտորական օպտիմալացման խնդիրներին ձևային առումով շատ նման, սակայն իմաստային առումով տարբերվող խնդիր:

Դիցուք նորից ունենք որոշումների կամայական X բազմություն, սակայն որոշումն ընդունում է ոչ թե մեկ անձ, այլ n անձանց մի խումբ, որոնցից յուրաքանչյուրն ունի իր սեփական $u_i(x), i=1,2,...,n$ օգտավետության ֆունկցիան: Միմյանց հետ գործարքի մեջ մտնելով, նրանք համատեղ ընտրում են մեկ կետ X բազմությունից: Եթե գործարքը տեղի չի ունենում, այսինքն չեն կարողանում միմիանց հետ գալ համաձայնության, ապա i-րդ մասնակիցը ստանում է ֆիքսած $u_i^*, (i=1,2,...,n)$ օգտավետություն: Այդ $u^*=\left(u_1^*, u_2^*, ..., u_n^*\right)$ կետն անվանում են *ստատուս քվո* կետ: Այսպիսով, գործարքի մոդելը ստանում է հետևյալ տեսքը՝ $\Gamma = \left\langle X; u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x); u_1^*, u_2^*, ..., u_n^* \right\rangle = \left\langle X, u(x), u^* \right\rangle$:

Բնական է, որ Γ գործարքի յուրաքանչյուր մասնակից ձգտում է ստանալ մաքսիմալ օգտավետություն և գործարքի լուծում ասելով կհասկանանք ոչ թե ընտրած որոշումը, այլ օգտավետությունները, որոնք ստանում են մասնակիցները,: Գործարքի լուծումը նշանակենք $u^0(\Gamma)=(u_1^0, u_2^0, ..., u_n^0)$: Քանի որ գործարքի խնդիրը էապես տարբերվում է վեկտորական օպտիմալացման խնդիրներից, ապա այս խնդրի համար հարկավոր է սահմանել նոր օպտիմալության սկզբունք: Հիմնական դիտարկվող սկզբունքը անվանում են Նեշի (Nash) սկզբունք: Այն սահմանվում է աքսիոմատիկորեն: Բերենք Նեշի աքսիոմների համակարգը:

Ա.1: Դիցուք $u^0(\Gamma)=(u_1^0, u_2^0, ..., u_n^0)$-ն $\Gamma = \left\langle X, u(x), u^* \right\rangle$ գործարքի լուծումն է: Այդ դեպքում լուծումը. ա) հասանելի է, այսինքն գոյություն ունի $x^0 \in X$ այնպես, որ $u^0 = u(x^0)$, բ) լուծումը անհատապես ռացիոնալ է՝ $u^0 \geq u^*$ և գ) լուծումը Պարետո օպտիմալ է՝ գոյություն չունի $x \in X$, որ $u_i(x) \geq u_i(x^0), i=1,2,...,n$ և այս անհավասարություններից առնվազն մեկը խիստ է:

Ա.2: Դիցուք $L=\left(L_1, L_2, ..., L_n\right)$-ը $u_i(x), i=1,2,...,n$ ֆունկցիաների դրական գծային ձևափոխությունն է: Այդ դեպքում $\left\langle X, Lu, Lu^* \right\rangle$ գործարքի լուծումը Lu^0-ն է:

Ա.3: Դիցուք $X^0 \subseteq X$ և $\Gamma = \left\langle X, u(x), u^* \right\rangle$ գործարքի լուծումը $u^0 = u(x^0)$ -ն է: Եթե $x^0 \in X^0$, ապա $\Gamma^0 = \left\langle X^0, u(x), u^* \right\rangle$ գործարքի լուծումը նույնպես $u^0 = u(x^0)$ -ն է:

Ա.4: Եթե խնդիրը սիմետրիկ է, այսինքն $u_i^* = u_j^*$, $(i, j = 1, 2, ..., n)$ և ցանկացած $x \in X$ համար և $\{1, 2, ..., n\}$ բազմության ցանկացած π տեղափոխության համար գոյություն ունի $y \in X$ այնպես, որ $u_i(x) = u_{\pi(i)}(y)$, ապա $u_i^0 = u_j^0$, $(i, j = 1, 2, ..., n)$:

Այս համակարգում առաջին աքսիոմը պահանջում է, որ գործարքի լուծումը լինի Պարետո-օպտիմալ, այսինքն բավարարի ամենաթույլ օպտիմալության սկզբունքին:

Երկրորդ աքսիոմը պահանջում է, որ լուծումը անկախ լինի չափման միավորից: Այդ պահանջը բնական է, հաշվի առնելով, որ ֆունկցիաներն օգտավետության ֆունկցիաներ են:

Երրորդ աքսիոմը կոչվում է չկապված այլընտրանքների անկախություն: Այն կարելի է դիտարկել որպես ֆոնկցիայի էքստրեմումի հատկություններից մեկը:

Չորրորդ աքսիոմը կոչվում է արդարության աքսիոմ՝ եթե բոլոր խաղացողները գտնվում են նույն պայմաններում, ապա պետք է հավասար ստանան:

Պարզվում է, որ այս աքսիոմները բավարար են լուծումը միարժեքորեն որոշելու համար: Նշանակենք՝

$$U = \left\{ u \in R^n : u = u(x), x \in X \right\}:$$

Քանի որ գործարքի մասնակիցներին հետաքրքրում է իրենց ստացվելիք օգտավետությունները և ոչ թե կոնկրետ որոշումն, ինչպես նաև հաշվի առնելով Ա.1 աքսիոմի առաջին պահանջը, ապա $\Gamma = \left\langle X, u(x), u^* \right\rangle$ գործարքը կարելի է դիտարկել $\Gamma = \left\langle U, u^* \right\rangle$ տեսքով:

Թեորեմ 5.3.1: Դիցուք U բազմությունը փակ, սահմանափակ, ուռուցիկ բազմություն է: Այդ դեպքում գոյություն ունի **Ա.1-Ա.4** աքսիոմներին բավարարող միակ $u^0 \in U$ լուծում:

Ապացույց: Այստեղ կբերենք ապացուցման միայն ընդհանուր սխեման: Նախ դիտարկենք այն դեպքը, երբ գոյություն ունի այնպիսի $u=(u_1,u_2,...,u_n)\in U$, որ $u_i>u_i^*$ բոլոր $i=1,2,...,n$ համար:

Կատարենք U բազմության դրական գծային ձևափոխություն, որի դեպքում u^* կետը կանցնի կոորդինատների սկզբնակետ՝ $u'=u-u^*$: U բազմության ձևափոխված պատկերը նշանակենք U'-ով: Պարզ է, որ U' բազմությունը նորից փակ, սահմանափակ, ուռուցիկ բազմություն է: Հետևաբար, գոյություն ունի $\bar{u}'\in U'$, այնպես, որ՝

$$\prod_{i=1}^{n}\bar{u}_i'=\max_{\substack{u'\in U',\\ u'>0}}\prod_{i=1}^{n}u_i': \qquad (5.3.1)$$

Այժմ նորից կատարենք U' բազմության դրական գծային ձևափոխություն, որի դեպքում $\bar{u}'$ կետը կանցնի (1,1,…,1) կետի՝ $u_i''=\dfrac{u_i'}{\bar{u}_i'}$: Նոր ստացված բազմությունը նշանակենք U''-ով:

Նշանակենք՝

$$\bar{U}=\left\{u=(u_1u_2,...,u_n)\in R^n:\prod_{i=1}^{n}u_i=1\right\}$$

և դիտարկենք $\langle\bar{U},0\rangle$ գործարքը: $\bar{U}$ բազմությունը սիմետրիկ բազմություն է և ակնհայտորեն բավարարում է **Ա.4** աքսիոմի պայմաններին: Հետևաբար, $\langle\bar{U},0\rangle$ գործարքի լուծման մեջ բոլոր բաղադրիչները պետք է լինեն հավասար: $\bar{U}$ բազմության միակ հավասար բաղադրիչներով կետը, որը բավարարում է **Ա.1** աքսիոմի Պարետո-օպտիմալության պայմանին՝ (1,1,…,1) կետն է: Մյուս կողմից, (5.3.1) պայմանից հետևում է, որ ցանկացած $u\in U''$ համար՝ $\prod_{i=1}^{n}u_i\le 1$, այսինքն՝ $U''\subseteq\bar{U}$, և, բացի դրանից, $(1,1,...,1)\in U''$: Այսպիսով, ըստ **Ա.3** աքսիոմի, (1,1,…,1) կետը լուծում է նաև $\langle U'',0\rangle$ գործարքի համար:

Քանի որ $\langle U'',0\rangle$ գործարքը ստացվել է $\langle U',0\rangle$ գործարքից դրական գծային ձևափոխության միջոցով, ապա $\langle U',0\rangle$ գործարքի լուծումը, ըստ **Ա.2** աքսիոմի, պետք է լինի (1,1,…,1) կետի նախապատկերը, այսինքն՝ $\bar{u}'$ -ը: **Ա.2** աքսիոմից օգտվելով, ևս մեկ քայլ ետ կարելի է կատարել և վերջնականապես կստանանք, որ $\langle U,u^*\rangle$ գործարքի լուծումը $\bar{u}'-u^*$ կետն է: Այսպիսով, **Ա.1-Ա.4** աքսիոմներին բավարարող լուծումը գտնելու համար հարկավոր է հաշվել

$$\max_{\substack{u\in U,\\ u>u^*}}\prod_{i=1}^{n}(u_i-u_i^*):$$

Վերադառնալով նախկին նշանակումներին, կստանանք, որ $\Gamma=\langle X,u(x),u^*\rangle$ գործարքի լուծումը $u^0=u(x^0)\in U$ -է, որը բավարարում է հետևյալ առնչությանը՝

$$\prod_{i=1}^{n}\left(u(x^0)-u^*\right)=\max_{x\in X,u(x)>u^*}\prod_{i=1}^{n}\left(u(x)-u^*\right):$$

Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ գոյություն չունի այնպիսի $u=(u_1,u_2,...,u_n)\in U$, որ $u_i>u_i^*$ բոլոր $i=1,2,...,n$ համար: **Ա.1** աքսիոմից հետևում է, որ բավական է դիտարկել միայն կետերը: Դիցուք գոյություն ունեն երկու կետեր ՝ $u',u''\in U$, $u_i'>u_i^*$, $u_j'=u_i^*$; $u_j''>u_j^*$, $u_i''=u_j^*$, $i\neq j$: Այս դեպքում, քանի որ U -ն ենթադրվել է ուռուցիկ, ապա $u'''=\frac{1}{2}u'+\frac{1}{2}u''\in U$: Սակայն $u_i'''>u_i^*,u_j'''>u_j^*$՝ ստացանք հակասություն: Հետևաբար, ինդեքսների $I=\{1,2,...,n\}$ բազմությունը կարելի է տրոհել երկու՝ I_1 և I_2 մասերի՝

$$I_1=\left\{i\in I: u_i(x)\le u_i^*, x\in X\right\},\ ,\ I_2=I-I_1:$$

Եվ ընդհանուր դեպքում, $u^0=\left(u_1^0,u_2^0,...,u_n^0\right)\in U$ լուծումը կստանանք հետևյալ կերպ: u^0 վեկտորի $i\in I_2$ բաղադրիչները ստացվում են

$$\prod_{i\in I_2}\left(u_i(x^0)-u_i^*\right)=\max_{x\in X,u(x)>u^*}\prod_{i\in I_2}\left(u_i(x)-u_i^*\right)$$

առնչությունից, իսկ $i \in I_1$ համար՝ $u_i^0 = u_i^*$:

Օրինակ 5.3.1: Դիցուք ապահովագրական A ընկերությունն ունի ռիսկերի պորտֆել, որի դեպքում հատուցումների ξ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը հավասար է 5 պայմանական միավորի, իսկ դիսպերսիան հավասար է 4 պայմանական միավորի: Ապահովագրական B ընկերությունը ռիսկերի պորտֆելի հատուցումների η պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը հավասար է 10-ի, իսկ դիսպերսիան՝ 8-ի: Այս երկու ապահովագրական ընկերությունները որոշում են մասամբ փոխանակել իրենց պորտֆելների պարունակությունը ռիսկերը նվազեցնելու նպատակով: Դիցուք A ընկերության պորտֆելի հատուցումների սկզբնական արժեքը ξ_1 է, փոխանակումից հետո՝ ξ_2: Համապատասխանաբար, B ընկերության համար՝ η_1 և η_2: Եթե A ընկերությունը իր պորտֆելի α մասը փոխանակում է B ընկերության պորտֆելի β մասի հետ, ապա կստանանք հետևյալ հավասարումները՝

$$E\xi_2 = (1-\alpha)E\xi_1 + \beta E\eta_1,$$
$$E\eta_2 = \alpha E\xi_1 + (1-\beta)E\eta_1:$$

Այստեղից երևում է, որ փոխանակումից հետո հատուցումների մաթեմատիկական սպասումների գումարը չի փոխվում, հետևաբար փոխադարձ հաշվարկները կարող են կարգավորվել դրամական փոխհատուցմամբ: Դիտարկենք ռիսկերի հիմնական բնութագրիչը՝ դիսպերսիան: Ենթադրելով, որ պատահական ξ և η մեծությունները անկախ են, կստանանք՝

$$D\xi_2 = (1-\alpha)^2 D\xi_1 + \beta^2 D\eta_1 = u_1(\alpha,\beta),$$
$$D\eta_2 = \alpha^2 D\xi_1 + (1-\beta)^2 D\eta_1 = u_2(\alpha,\beta):$$

Հաշվի առնելով, որ եթե գործարքը չկայանա, ապա ընկերությունների դիսպերսիաները կմնան սկզբնական դիսպերսիաներ՝ $D\xi_1 = 4$ և $D\eta_1 = 8$, ուստի այս գործարքի մոդելը կարելի է ներկայացնել $\langle X; u_1(\alpha,\beta), u_2(\alpha,\beta); 4,8\rangle$ մոդելի տեսքով, որտեղ $X = [0,1]\times[0,1]$: Կազմենք գործարքի Նեշի ֆունկցիան՝

$$F(\alpha,\beta)=\left[4-u_1(\alpha,\beta)\right]\left[8-u_2(\alpha,\beta)\right]=\left[4-4(1-\alpha)^2-8\beta^2\right]\left[8-4\alpha^2-8(1-\beta)^2\right]:$$

Մաքսիմալացնելով այս ֆունկցիան $\alpha+\beta=1$ պայմանի դեպքում կստանանք հետևյալ արդյունքը՝

$$\alpha^0=0,613;$$
$$\beta^0=0,387;$$
$$u_1\left(\alpha^0,\beta^0\right)=1,797;$$
$$u_2\left(\alpha^0,\beta^0\right)=4,509:$$

Այսպիսով, փոխանակման դեպքում ընկերությունների ռիսկերը (դիսպերսիաները) նվազում են համապատասխանաբար 2,203-ով և 3,491-ով:

ԽԱՂԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

6.1. ԱՆԴԱՇԻՆՔ ԽԱՂԵՐ

Ինչպես նշվել էր նախաբանում, խաղերի տեսությունը կոնֆլիկտի կամ անորոշության պայմաններում որոշումներ ընդունելու մաթեմատիկական տեսություն է: Կոնֆլիկտային իրավիճակների մաթեմատիկական մոդելները կառուցելիս առաջին հերթին հարկավոր է նշել կոնֆլիկտի մասնակիցներին, մասնակիցների հնարավորությունները, ինչպես նաև նրանց նախապատվությունները: Դիցուք կոնֆլիկտի մասնակիցները n-են, որոնցից յուրաքանչյուր i-րդն ունի իր բոլոր հնարավոր որոշումների S_i բազմությունը, իսկ որոշումների արդյունքը գնահատվում է օգտավետության H_i ֆունկցիայով: Այդպիսով կոնֆլիկտի պայմաններում որոշումներ ընդունելու մոդելը կարելի է ներկայացնել

$$G = \left\langle I, \{S_i\}_{i\in I}, \{H_i\}_{i\in I} \right\rangle \tag{6.1.1}$$

համակարգի տեսքով:

Այս համակարգն անվանում են *խաղ,* կոնֆլիկտի մասնակիցներին՝ *խաղացողներ*: $I = \{1, 2, \dots, n\}$ բազմությունը խաղացողների համարների բազմությունն է, S_i-ն անվանում են i-րդ խաղացողի *ստրատեգիաների* բազմություն: Կախված խնդրի դրվածքից այն կարող է ունենալ տարբեր կառուցվացքներ,: H_i-ն n փոփոխականի իրականարժեք ֆունկցիա է, որն անվանում են i-րդ խաղացողի *շահույթի ֆունկցիա*:

Այդպես սահմանված խաղը խաղացվում է հետևյալ կերպ: Խաղացողներից յուրաքանչյուրը ընտրում է որևէ կետ իր ստրատեգիաների բազմությունից, որի արդյունքում ստացված $s = (s_1, s_2, \dots, s_n), s_i \in S_i, i = 1, 2, \dots, n$ վեկտորն անվանում են *իրավիճակ* խաղում: Այս իրավիճակում i-րդ խաղացողը ստանում է $H_i(s)$ շահույթ: Ընտրություն կատարելիս յուրաքանչյուր խաղացող ձգտում է առավելագույն շահույթի: Խաղերը միմյանցից կարող են տարբերվել ինչպես հակառակորդների քայլերի վերաբերյալ տեղեկատվությամբ, այնպես էլ խաղացողների միջև պայմանավորվածությունների առկայությամբ:

Սահմանում 6.1.1: (6.1.1) համակարգով որոշվող խաղն անվանում են *նորմալ տեսքով անդաշինք խաղ,* կամ պարզապես *անդաշինք խաղ,* եթե խաղացողներն իրենց ընտրությունները կատարում են միմիանցից անկախ, այսինքն չստանալով ոչ մի տեղեկատվություն հակառակորդների քայլերի վերաբերյալ, և իրավունք չունեն պայմանավորվել համատեղ գործողությունների մասին:

Ինչպես երևում է խաղի սահմանումից, խաղացողի շահույթը կախված է ոչ միայն իր ընտրած ստրատեգիայից, այլ նաև մյուս բոլոր խաղացողների ընտրություններից, (որոնք անդաշինք խաղերում խաղացողին հայտնի չեն): Այսինքն, ընտրելով n փոփոխականի ֆոնկցիայի միայն մեկ փոփոխականի արժեքը, խաղացողը պետք է ձգտի ստանալու իր շահույթի ֆունկցիայի առավելագույն արժեքը: Այսպիսով, առաջին հարցը, որն առաջանում է անդաշինք խաղերը դիտարկելիս, օպտիմալության սկզբունքի հարցն է: Հիմնական օպտիմալության սկզբունքը, որը կիրառվում է անդաշինք խաղերում՝ Նեշի հավասարակշռության սկզբունքն է: Այն վերաբերում է ոչ թե ստրատեգիաների այլ իրավիճակների օպտիմալությանը:

Սահմանում 6.1.2. $s^0=(s_1^0,s_2^0,...,s_i^0,...,s_n^0)$ իրավիճակն անվանում են *ընդունելի* i-րդ խաղացողի համար, եթե բոլոր $s_i \in S_i$ ստրատեգիաների համար՝

$$H_i\left(s_1^0,s_2^0,...,s_i^0,...,s_n^0\right) \geq H_i\left(s_1^0,s_2^0,...,s_i,...,s_n^0\right) \qquad (6.1.2)$$

Սահմանում 6.1.3: $s^0=(s_1^0,s_2^0,...,s_i^0,...,s_n^0)$ իրավիճակն անվանում են ըստ Նեշի հավասարակշռության իրավիճակ, եթե այն ընդունելի է բոլոր խաղացողների համար միաժամանակ, այսինքն (6.1.2) անհավասարությունները բավարարվում են նաև բոլոր $i \in I$ համար:

Ինչպես երևում է սահմանումից, հավասարակշռության իրավիճակը խախտելը ձեռնատու չէ ոչ մի խաղացողի համար: Հետևյալ սահմանումը և հաջորդող թեորեմը թույլ են տալիս ստուգել հավասարակշռության սկզբունքի կոռեկտությունը, ինչպես նաև տարանջատել խաղի էական կողմերը ոչ էականներից:

Սահմանում 6.1.4: Երկու

$$G=\left\langle I,\{S_i\}_{i\in I},\{H_i\}_{i\in I}\right\rangle,$$

$$G'=\left\langle I,\{S_i\}_{i\in I},\{H_i'\}_{i\in I}\right\rangle,$$

խաղերն անվանում են *ստրատեգիապես համարժեք*, եթե գոյություն ունեն այնպիսի $a>0$ և $b_i, i\in I$ իրական թվեր, որ

$$H_i'(s)=aH_i(s)+b_i\,,\ \ i\in I: \tag{6.1.3}$$

Թեորեմ *6.1.1:* Ստրատեգիապես համարժեք խաղերում հավասարակշռության իրավիճակների բազմությունները համընկնում են:

Թեորեմի ապացույցն ակներև է. Բավական է (6.1.3) արտահայտությունները տեղադրել (6.1.2) անհավասարությունների մեջ և կրճատել հաստատունները:

Սահմանում 6.1.5. Անդաշինք խաղն անվանում են *հաստատուն գումարով խաղ,* եթե՝

$$\sum_{i\in I}H_i\left(s\right)=const:$$

Դժվար չէ տեսնել, որ հաստատուն գումարով ցանկացած խաղ ստրատեգիապես համարժեք է զրո գումարով խաղի:

Հավասարակշռության իրավիճակի գոյության և միակության հարցերը կախված են կոնկրետ խաղերի առանձնահատկություններից: Բերենք երեք տեսական օրինակներ, որտեղ արտացոլվում են հավասարակշռության իրավիճակի սահմանման ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական կողմերը:

Օրինակ 6.1.1: /Հանցագործի երկընտրանք:/ Ծանր հանցագործության մեջ մեղադրվող երկու հանցագործներ (առաջին և երկրորդ խաղացողներ) գտնվում են նախնական կալանքի միմիանցից մեկուսացված բանտախցերում: Չունենալով ուղիղ ապացույցներ, դատաքննությունը կարող է հիմնվել միայն հանցագործների խոստովանական ցուցմունքների վրա: Հանցագործներին հետևյալ պայմաններն են առաջարկվում: Եթե երկու հանցագործները խոստովանեն, որ կատարել են այդ հանցագործությունը, ապա կազատազրկվեն յուրաքանչյուրը 5 տարով: Այն դեպքում, երբ հանցագործներից միայն մեկը խոստովանի, ապա խոստովանողին ազատ են արձակում, իսկ մյուսին դատապարտում են առավելագույն ժամկետի՝ 10 տարվա ազատազրկման: Եվ եթե երկուսն էլ պնդում են իրենց անմեղությունը, ապա մեղադրողը խոստանում է ներկայացնել մեղադրանք որևէ մանր հանցագործության մեջ և դատապարտել մեկական տարի յուրաքանչյուրին:

Կառուցենք այս խաղի մաթեմատիկական մոդելը: Խաղացողներն երկուսն են՝ երկու հանցագործները, հետևաբար, $I=\{1,2\}$: Խաղացողների ստրատեգիաների բազմությունները երկէլեմենտ են՝ $S_1 = S_2 = \{0,1\}$, որտեղ 1-ը համապատասխանում է խոստովանելու ստրատեգիաին, 0-ն՝ ժխտելու: Խաղացողների շահույթի ֆունկցիաները կունենան հետևյալ տեսքը

$$H_1(0,0) = -1, \quad H_2(0,0) = -1,$$

$$H_1(0,1) = -10, \quad H_2(0,1) = 0,$$

$$H_1(1,0) = 0, \quad H_2(1,0) = -10,$$

$$H_1(1,1) = -5, \quad H_2(1,1) = -5:$$

Դժվար չէ ստուգել, որ այս խաղում հավասարակշռության իրավիճակ գոյություն ունի և այն միակն է՝ դա (1,1) իրավիճակն է, որի դեպքում հանցագործները երկուսն էլ խոստովանում են: (0,0) իրավիճակը, որը թվում է, թե լավագույնն է հանցագործների համար, Պարետո-օպտիմալ է, սակայն կայուն չէ՝ այդ իրավիճակից շեղվելը ձեռնտու է հանցագործներից յուրաքանչյուրի համար:

Օրինակ 6.1.2: Ընտանեկան վեճ: Երիտասարդ զույգը որոշում է երեկոն անց կացնել միասին: Տվյալ պահին յուրաքանչյուրը կարող է ընտրել երկու հնարավոր վայրերից մեկը՝ գնալ թատրոն կամ ֆուտբոլի մարզադաշտ: Եթե երկուսով ընտրում են թատրոնը, ապա աղջկա (առաջին խաղացող) օգտավետությունը համարենք 5 միավոր, իսկ տղայինը (երկրորդ խաղացող)՝ 2 միավոր: Ֆուտբոլը ընտրելու դեպքում աղջկա օգտավետությունը վերցնենք 2 միավոր, տղայինը՝ 5 միավոր: Այն դեպքում, երբ ընտրությունները տարբեր են, օգտավետությունները համարենք հավասար 0-ի: Եթե թատրոն ընտրելու ստրատեգիան նշանակենք 0-ով, իսկ ֆուտբոլ ընտրելու ստրատեգիան 1-ով, ապա մոդելը կընդունի հետևյալ տեսքը՝ $I=\{1,2\}$, $S_1 = S_2 = \{0,1\}$,

$$H_1(0,0) = 5, \quad H_2(0,0) = 2,$$

$$H_1(0,1) = 0, \quad H_2(0,1) = 0,$$

$$H_1(1,0) = 0, \quad H_2(1,0) = 0,$$

$$H_1(1,1)=2, \qquad H_2(1,1)=5:$$

Դժվար չէ տեսնել, որ այս խաղում ունենք երկու հավասարակշռության իրավիճակ՝ (0,0) և (1,1), որոնք, ի դեպ, նաև Պարետո-օպտիմալ են:

Օրինակ 6.1.3: (Գիր, դուշ): Առաջին խաղացողը պահում է մետաղադրամը: Երկրորդ խաղացողը պետք է գուշակի, թե մետաղադրամի որ կողմն է պահած: Ճիշտ գուշակելու դեպքում ստանում է մեկ միավոր, սխալի դեպքում՝ կորցնում է մեկ միավոր: Եթե մետաղադրամի կողմերը համարակալենք, ապա կստանանք հետևյալ խաղը՝ $I=\{1,2\}$, $S_1=S_2=\{0,1\}$,

$$H_1(0,0)=-1, \quad H_2(0,0)=1,$$

$$H_1(0,1)=1, \quad H_2(0,1)=-1,$$

$$H_1(1,0)=1, \quad H_2(1,0)=-1,$$

$$H_1(1,1)=-1, \quad H_2(1,1)=1:$$

Այս խաղում գոյություն չունեն հավասարակշռության իրավիճակներ, ինչպես նաև Պարետո-օպտիմալ ստրատեգիաներ:

Այդպիսով, դիտարկված երեք պարզագույն օրինակները ցույց են տալիս, որ անդաշինք խաղերում կարող են գոյություն չունենալ հավասարակշռության իրավիճակներ, իսկ գոյության դեպքում այն կարող է միակը չլինել: Ընդ որում հավասարակշռությունը և Պարետո-օպտիմալությունը չեն առնչվում այս խաղերում:

5.2. ՀԱԿԱՄԱՐՏ ԽԱՂԵՐ

Սահմանում 6.2.1: Զրո գումարով երկու խաղացողի խաղն անվանում են *հակամարտ խաղ:*

Հակամարտ խաղերի համար կարելի է որոշ չափով պարզեցնել նախորդ կետում բերված սահմանումները: Իրոք, քանի որ հակամարտ խաղերում միշտ երկու խաղացող են, ապա (6.1.1) խաղի սահմանման մեջ կարելի է չնշել խաղացողների I բազմությունը: Այդպիսով, մոդելի սահմանման մեջ կմնան երկու բազմություններ և շահույթի երկու՝ H_1 և H_2 ֆունկցիաներ: Սակայն, քանի որ զրո գումարով խաղի սահմանումից հետևում է, որ $H_2 = -H_1$, ապա մոդելում կարելի է նշել միայն առաջին խաղացողի շահույթի ֆունկցիան: Վերջնականապես հակամարտ խաղի մոդելը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$G = \langle X, Y, H \rangle : \tag{6.2.1}$$

Այստեղ X-ը առաջին, իսկ Y-ը՝ երկրորդ խաղացողի ստրատեգիաների բազմությունն է, H-ը առաջին խաղացողի շահույթի ֆունկցիան: Խաղացողները միմիանցից անկախ ընտրում են համապատասխանաբար $x \in X$ և $y \in Y$: Արդյունքում երկրորդ խաղացողը վճարում է առաջինին $H(x, y)$ շահույթ: Դրանով խաղն ավարտվում է:

Հակամարտ խաղերում հավասարակշռության սահմանումը նույնպես պարզեցվում է: Իրոք, հավասարակշռության իրավիճակի (6.2.2) սահմանումից հետևում է, որ (x^0, y^0) կետը հավասարակշռության իրավիճակ է, եթե

$$H_1(x^0, y^0) \geq H_1(x, y^0), x \in X,$$
$$H_2(x^0, y^0) \geq H_2(x^0, y), y \in Y:$$

Հաշվի առնելով, որ $H_2(x, y) = -H_1(x, y)$ և միավորելով այս անհավասարությունները, կստանանք հավասարակշռության իրավիճակի սահմանում հակամարտ խաղերում:

Սահմանում 6.2.2: (x^0, y^0) իրավիճակն անվանում են *հավասարակշռության իրավիճակ* հակամարտ խաղերում, եթե բոլոր $x \in X$ և $y \in Y$-ի համար այն բավարարում է հետևյալ կրկնակի անհավասարությանը՝

$$H(x,y^0) \le H(x^0,y^0) \le H(x^0,y): \qquad (6.2.2)$$

Այժմ դիտարկենք օպտիմալության մեկ այլ սկզբունք,: Դիցուք արաջին խաղացողն ընտրել է որևէ $x \in X$: Եթե երկրորդ խաղացողին որևէ եղանակով հայտնի դարձավ այդ կետը, ապա ակնհայտ է, որ նա կընտրի $y \in Arg \min_{y \in Y} H(x,y)$ (այստեղ ենթադրվում է, որ $H(x,y)$ ֆունկցիայի բոլոր էքստրեմումները հասանելի են): Այսպիսով, արաջին խաղացողն, ընտրելով որևէ $x \in X$, չի կարող ապահովել իր շահույթը ավելին, քան $\min_{y \in Y} H(x,y)$: Ընտրելով $x' \in Arg \max_{x \in X}[\min_{y \in Y} H(x,y)]$ առաջին խաղացողի ապահոված շահույթը դառնում է նվազագույնը $\max_{x \in X}[\min_{y \in Y} H(x,y)] = v_1$:

Մյուս կողմից, ընտրելով որևէ $y \in Y$, երկրորդ խաղացողը չի վճարի առաջինին ավելին, քան $\max_{x \in X} H(x,y)$, հետևաբար, ընտրելով $y' \in Arg \min_{y \in Y}[\max_{x \in X} H(x,y)]$ նա կվճարի առաջինին առավելագույնը $\min_{y \in Y}[\max_{x \in X} H(x,y)] = v_2$: Այն դեպքում, երբ $v_1 = v_2 = v$, առաջին խաղացողն ունի ստրատեգիա, որի դեպքում կստանա նվազագույնը v շահույթ, իսկ երկրորդ խաղացողն ունի ստրատեգիա, որի դեպքում չի վճարի առաջին խաղացողին v-ից ավել: Եվ այս դեպքում (երբ $v_1 = v_2 = v$) x' և y' ստրատեգիաները կարելի է համարել օպտիմալ: Այս սկզբունքն անվանում են *մաքսիմալ ապահոված շահույթի սկզբունք*:

Պարզվում է, որ հակամարտ խաղերում այս երկու օպտիմալության սկզբունքները՝ հավասարակշռության սկզբունքը և մաքսիմալ ապահոված շահույթի սկզբունքը համարժեք են: Ապացուցենք այդ փաստը: Նախ մեզ անհրաժեշտ կլինի հետևյալ օժանդակ պնդումը:

Լեմ 6.2.1: *Երկու փոփոխականի ցանկացած $H(x,y)$ ֆունկցիայի համար*

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} H(x,y) \le \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} H(x,y):$$

<u>Ապացույց:</u> Ցանկացած ֆիքսած $y \in Y$ և բոլոր $x \in X$ համար

$$H(x,y) \le \sup_{x \in X} H(x,y):$$

Այժմ ֆիքսենք որևէ $x \in X$: Քանի որ նախորդ անհավասարությունը բավարարվում է ցանկացած ֆիքսած $y \in Y$ համար, ապա

$$\inf_{y \in Y} H(x, y) \leq \inf_{y \in Y} \left(\sup_{x \in X} H(x, y) \right):$$

Այս անհավասարությունը ճիշտ է ցանկացած ֆիքսած $x \in X$ դեպքում, հետևաբար այն ճիշտ է նաև sup-ի համար ըստ $x \in X$

$$\sup_{x \in X} \left(\inf_{y \in Y} H(x, y) \right) \leq \inf_{y \in Y} \left(\sup_{x \in X} H(x, y) \right): \tag{6.2.3}$$

Թեորեմ 6.2.2: *Որպեսզի հակամարտ* $G = \langle X, Y, H \rangle$ *խաղում գոյություն ունենա հավասարակշռության իրավիճակ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյոթյուն ունենան և հավասար լինեն* $\max_{x \in X} \inf_{y \in Y} H(x, y)$ *և* $\min_{y \in Y} \sup_{x \in X} H(x, y)$ *կրկնակի էքստրեմումները:*

<u>Ապացույց:</u> *Անհրաժեշտություն:* Դիցուք $G = \langle X, Y, H \rangle$ խաղում գոյություն ունի հավասարակշռության իրավիճակ, այսինքն (x^0, y^0) իրավիճակ, որը բավարարում է

$$H(x, y^0) \leq H(x^0, y^0) \leq H(x^0, y) \tag{6.2.4}$$

անհավասարությանը բոլոր $x \in X$ և $y \in Y$ համար: Քանի որ այս անհավասարության աջ մասը ճիշտ է բոլոր $y \in Y$ համար, ապա`

$$H(x^0, y^0) \leq \inf_{y \in Y} H(x^0, y):$$

Եվ, քանի որ այն ճիշտ է x^0 կետում, ապա այն առավել ևս ճիշտ է նաև ճշգրիտ վերին եզրի համար, այսինքն`

$$H(x^0, y^0) \leq \inf_{y \in Y} H(x^0, y) \leq \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} H(x, y): \tag{6.2.5}$$

Նույն եղանակով 6.2.4 անհավասարության ձախ մասից կստանանք`

$$H(x^0, y^0) \geq \sup_{x \in X} H(x, y^0) \geq \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} H(x, y): \tag{6.2.6}$$

Միացնելով (6.2.5) և (6.2.6) անհավասարությունները, ստանում ենք՝

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} H(x,y) \ge \inf_{y\in Y} H\left(x^0,y\right) \ge H\left(x^0,y^0\right) \ge \sup_{x\in X} H\left(x,y^0\right) \ge \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} H(x,y):$$

Սակայն 6.2.1 լեմից հետևում է, որ երկու փոփոխականի ցանկացած ֆունկցիայի համար տեղի ունի հակառակ անհավասարությունը: Այսպիսով, եթե խաղում գոյություն ունի հավասարակշռության իրավիճակ, ապա

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} H(x,y) = \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} H(x,y) = H\left(x^0,y^0\right): \tag{6.2.7}$$

Բացի այդ,

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} H(x,y) = \inf_{y\in Y} H\left(x^0,y\right), \sup_{x\in X} H\left(x,y^0\right) = \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} H(x,y), \tag{6.2.8}$$

հետևաբար, կրկնակի էքստրեմումների արտաքին էքստրեմումները հասանելի են (x^0 և y^0 կետերում) և վերջնականապես ստանում ենք, որ

$$\max_{x\in X}\inf_{y\in Y} H(x,y) = \min_{y\in Y}\sup_{x\in X} H(x,y):$$

Բավարարություն: Այժմ ենթադրենք, որ $\max_{x\in X}\inf_{y\in Y} H(x,y)$-ը և $\min_{y\in Y}\sup_{x\in X} H(x,y)$-ը գոյություն ունեն և հավասար են: Արտաքին էքստրեմումների գոյությունից հետևում է այնպիսի $x'\in X$ և $y'\in Y$ կետերի գոյութունը, որոնց համար՝

$$\max_{x\in X}\inf_{y\in Y} H(x,y) = \inf_{y\in Y} H(x',y),$$
$$\min_{y\in Y}\sup_{x\in X} H(x,y) = \sup_{x\in X} H(x,y'):$$

Ճշգրիտ վերին և ստորին եզրերի սահմանումից հետևում է, որ բոլոր $x\in X$ և $y\in Y$ համար

$$\begin{aligned}\max_{x\in X}\inf_{y\in Y} H(x,y) &= \inf_{y\in Y} H(x',y) \le H(x',y),\\ \min_{y\in Y}\sup_{x\in X} H(x,y) &= \sup_{x\in X} H(x,y') \ge H(x,y'):\end{aligned} \tag{6.2.9}$$

Քանի որ այս անհավասարությունները բավարարվում են բոլոր $x \in X$ և $y \in Y$ համար, ապա բավարարվում են նաև $x' \in X$ և $y' \in Y$ համար: Տեղադրելով այս կետերը 6.2.9 անհավասարությունների մեջ և հաշվի առնելով, որ ըստ թեորեմի պայմանի կրկնակի էքստրեմումները հավասար են, կստանանք

$$\max_{x\in X}\inf_{y\in Y} H(x,y) = \min_{y\in Y}\sup_{x\in X} H(x,y) = H(x',y'):$$

(6.2.10)

Տեղադրելով կրկնակի էքստրեմումների $H(x',y')$ արժեքը (6.2.9) անհավասարությունների մեջ, ստանում ենք, որ

$$H(x,y') \le H(x',y') \le H(x',y)$$

բոլոր $x \in X$ և $y \in Y$ համար: Այսինքն, (x',y') իրավիճակը հավասարակշռության իրավիճակ է G խաղում:

Հետևանք: Դիցուք (x^0,y^0)–ը և (x',y') -ը երկու հավասարակշռության իրավիճակներ են $G=\langle X,Y,H\rangle$ խաղում: Այդ դեպքում (x^0,y') և (x',y^0) իրավիճակները նույնպես հավասարակշռության իրավիճակներ են և

$$H(x^0,y^0) = H(x',y') = H(x^0,y') = H(x',y^0):$$

Այս պնդումն արդեն ստացվել է թեորեմի ապացուցման ընթացքում: Իրոք,6.2.8 հավասարումներից հետևում է, որ

$$x^0 \in Arg\max_{x\in X}\left(\inf_{y\in Y} H(x,y)\right),$$

$$x' \in Arg\max_{x\in X}\left(\inf_{y\in Y} H(x,y)\right),$$

$$y^0 \in Arg\min_{y\in Y}\left(\sup_{x\in X} H(x,y)\right),$$

$$y' \in Arg\min_{y\in Y}\left(\sup_{x\in X} H(x,y)\right):$$

Իսկ (6.2.10)-ից հետևում է, որ շահույթի ֆունկցիայի արժեքը հավասարակշռության իրավիճակում հավասար է կրկնակի էքստրեմումների ընդհանուր արժեքին, հետևաբար, հավասարակշռության բոլոր իրավիճակներում շահույթի ֆունկցիայի արժեքները նույնն են:

6.3. ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ԽԱՂԵՐ

Հակամարտ խաղերում հավասարակշռության իրավիճակների գոյության խնդրի դիտարկումը սկսենք մասնավոր դեպքից՝ վերջավոր հակամարտ խաղերից: Դիցուք $G=\langle X,Y,H\rangle$ խաղում X և Y բազմությունները վերջավոր են, այսինքն՝ $X=\{x_1,x_2,...,x_m\}$, $Y=\{y_1,y_2,...,y_n\}$: Նշանակենք $H(x_i,y_j)=h_{ij}$; $i=1,2,...,m$; $j=1,2,...,n$: Այսպիսով, յուրաքանչյուր վերջավոր հակամարտ խաղին կհամապատասխանի որևէ մատրից՝ $\{h_{ij}\}_{i=1,...,m}^{j=1,...,n}$: Եվ հակառակը, դիցուք տրված է որևէ $m\times n$ չափսերի H մատրից: Այս մատրիցը կարելի է դիտարկել որպես հակամարտ խաղ, որտեղ առաջին խաղացողն ունի m հատ ստրատեգիա (տողերի թվին համապատասխան) , երկրորդ խաղացողն ունի n հատ ստրատեգիա (սյուների թվին համապատասխան), իսկ առաջին խաղացողի շահույթը (i,j) իրավիճակում հավասար է h_{ij}: Այսպիսով, յուրաքանչյուր վերջավոր հակամարտ խաղին կարելի է համապատասխանության մեջ դնել մեկ մատրից և յուրաքանչյուր մատրից կարելի է դիտարկել որպես հակամարտ խաղ: Այդ պատճառով վերջավոր հակամարտ խաղերն անվանում են *մատրիցային խաղեր:*

Մատրիցային խաղերի դեպքում նախորդ բաժնի սահմանումները կընդունեն հետևյալ տեսքը՝ (i^0,j^0) իրավիճակը հավասարակշռության իրավիճակ է, եթե բոլոր $i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n$ համար՝

$$h_{ij^0}\le h_{i^0j^0}\le h_{i^0j}:$$

Հաշվի առնելով, որ վերջավոր բազմությունների վրա էքստրեմումները միշտ հասանելի են, հավասարակշռության իրավիճակի գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\max_i\min_j h_{ij}=\min_j\max_i h_{ij}:$$

Սակայն, ինչպես տեսանք թիվ 6.1.3 օրինակում, նույնիսկ պարզագույն խաղերում հավասարակշռության իրավիճակ կարող է գոյություն չունենալ: Այդ օրինակում բերված խաղի մատրիցն այսպիսին է՝

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}:$$

Հեշտ է ստուգել, որ այս խաղում $\max_i \min_j h_{ij} = -1$, $\min_j \max_i h_{ij} = 1$, այսինքն առաջին խաղացողի մաքսիմալ ապահոված շահույթը հավասար է -1-ի, իսկ երկրորդ խաղացողինը՝ 1-ի: Ընդլայնենք խաղացողների հնարավորությունները և թույլ տանք նրանց ոչ թե ընտրեն կոնկրետ տող կամ սյուն, այլ տողերը և սյուները ընտրեն որոշակի հավանականություններով: Դիցուք առաջին խաղացողը մատրիցի առաջին տողն ընտրում է $p \in [0,1]$ հավանականությամբ, իսկ երկրորդ տողը՝ $1-p$ հավանականությամբ: Այս դեպքում, եթե երկրորդ խաղացողն ընտրի առաջին տողն, ապա առաջին խաղացողի շահույթի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է $-1 \cdot p + 1 \cdot (1-p) = 1-2p$, երկրորդ տողն ընտրելու դեպքում շահույթի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է $1 \cdot p + (-1) \cdot (1-p) = 2p-1$: Բոլոր դեպքերում առաջին խաղացողի շահույթի մաթեմատիկական սպասումը կլինի ոչ պակաս, քան $\min\{1-2p, 2p-1\}$: Հեշտ է տեսնել, որ այս արտահայտությունը հասնում է առավելագույն արժեքի $p = 1/2$ դեպքում և հավասար է 0-ի: Այսպիսով, ընտրելով տողերը հավասար հավանականություններով, առաջին խաղացողն ապահովում է իր համար 0–ից ոչ պակաս շահույթի մաթեմատիկական սպասում: Բայց ճիշտ նույն կերպ կարող է գործել նաև երկրորդ խաղացողը, որը ընտրելով մատրիցի սյուները հավասար հավանականություններով կարող է վճարել առաջինին ոչ ավել, քան 0: Այսպիսով, օգտագործելով այսպիսի հավանականային ստրատեգիաներ, խաղացողների ապահոված շահույթները հավասարվում են: Այս օրինակը որոշակի հիմքեր է տալիս հավանականային ստրատեգիաներ օգտագործելու համար:

Սահմանում 6.3.1: $m \times n$ չափսերի H մատրիցային խաղում առաջին խաղացողի *խառն ստրատեգիա* է կոչվում ոչ բացասական $p = (p_1, p_2, ..., p_m)$; $p_i \geq 0, i = 1,2,...,m; \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ վեկտորը: Նմանապես, երկրորդ խաղացողի *խառն ստրատեգիա* է կոչվում ոչ բացասական $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$; $q_j \geq 0, j = 1,2,...,n; \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$ վեկտորը: Այստեղ p_i-ն H մատրիցի i–րդ տող ընտրելու, իսկ q_j-ն j-րդ սյուն ընտրելու հավանականութունն է: Առաջին խաղացողի բոլոր խառն ստրատեգիաների բազմությունը նշանակենք S_m-ով, իսկ երկրորդ խաղացողի բոլոր խառն ստրատեգիաների բազմությունը՝ S_n-ով, այսինքն՝

$$S_m = \left\{ p = \left(p_1, p_2, ..., p_m \right) \in R_+^m : \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \right\} \ , \ S_n = \left\{ q = \left(q_1, q_2, ..., q_n \right) \in R_+^n : \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \right\}:$$

Ի տարբերություն խառն ստրատեգիաների, խաղացողի կողմից տողի կամ սյան համարի ընտրությունը անվանում են խաղացողի *մաքուր ստրատեգիա*: Առաջին խաղացողի i –րդ մաքուր ստրատեգիան կարելի է դիտարկել որպես $p = \left(p_1, p_2, ..., p_m \right)$ խառն ստրատեգիա, որտեղ $p_i = 1, p_k = 0, k \neq i$: Մաքուր ստրատեգիաի այդպիսի սահմանման դեպքում S_m բազմությունը հանդիսանում է առաջին խաղացողի մաքուր ստրատեգիաների բազմության ուռուցիկ թաղանթը: Նմանապես, S_n բազմությունը հանդիսանում է երկրորդ խաղացողի մաքուր ստրատեգիաների բազմության ուռուցիկ թաղանթը:

Խաղացողի շահույթը խառն ստրատեգիաների պայմաններում սահմանվում է, որպես շահույթի մաթեմատիկական սպասում: Քանի որ հակամարտ խաղերում խաղացողները գործում են միմիանցից անկախ, ապա առաջին խաղացողի h_{ij} շահույթ ստանալու հավանականությունը $\left(p, q \right)$ իրավիճակում հավասար է $p_i q_j$, հետևաբար, շահույթի $H\left(p, q \right)$ մաթեմատիկական սպասումը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$H\left(p, q \right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i h_{ij} q_j :$$

Այն դեպքերում, երբ խաղացողներից մեկն ընտրում է մաքուր ստրատեգիա, այսինքն $\left(p, j \right)$, $\left(i, q \right)$ տեսքի իրավիճակներում խաղացողի շահույթը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$H\left(p, j \right) = \sum_{i=1}^{m} p_i h_{ij} \ , \ \ H\left(i, q \right) = \sum_{j=1}^{n} h_{ij} q_j :$$

Ակնհայտ է, որ

$$H\left(p, q \right) = \sum_{i=1}^{m} p_i H\left(i, q \right) = \sum_{j=1}^{n} H\left(p, j \right) q_j :$$

Սահմանում 6.3.2: Մատրիցային խաղի խառն ընդլայնում անվանում են հետևյալ հակամարտ խաղը

$$G = \langle S_m, S_n, H(p,q) \rangle:$$

Այժմ անցնենք հավասարակշռության իրավիճակների գոյության խնդրին: Նախ ապացուցենք երկու լեմ:

Լեմ 6.3.1: *(Խառն ստրատեգիաների անցման լեմ): Եթե առաջին խաղացողի որևէ $p \in S_m$ ստրատեգիայի և c -ի համար*

$$H(p, j) \geq c, \ j = 1, 2, \dots, n,$$

ապա բոլոր $q \in S_n$ համար $H(p,q) \geq c$:

Եթե երկրորդ խաղացողի որևէ $q \in S_n$ ստրատեգիայի և c -ի համար

$$H(i,q) \leq c, i = 1, 2, \dots, m,$$

ապա բոլոր $p \in S_m$ համար $H(p,q) \leq c$:

<u>Ապացույց:</u> Բավական է ապացուցել լեմի առաջին մասը: Դիցուք $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$-ն երկրորդ խաղացողի կամայական ստրատեգիա է: Այդ դեպքում՝

$$H(p,q) = \sum_{j=1}^{n} H(p, j) q_j \geq \sum_{j=1}^{n} c q_j = c \sum_{j=1}^{n} q_j = c:$$

Լեմ 13.2: *(Լեմ երկընտրանքի վերաբերյալ): $m \times n$ չափսերի ցանկացած H մատրիցի համար տեղի ունի երկու այլընտրանքներից մեկը.*

1. *Գոյություն ունի այնպիսի $p \in S_m$ վեկտոր, որ $H(p, j) \geq 0$ բոլոր $j = 1, 2, \dots, n$ համար:*
2. *Գոյություն ունի այնպիսի $q \in S_n$ վեկտոր, որ $H(i,q) \leq 0$ բոլոր $i = 1, 2, \dots, m$ համար:*

<u>Ապացույց:</u> Դիցուք H –ը կամայական $m \times n$ չափսերի մատրից է: Մատրիցի սյուները կարելի է դիտարկել որպես m –չափանի վեկտորական տարածության կետեր՝ եթե H^j-ով նշանակենք H-ի j –րդ սյունը, այսինքն՝ $H^j = (h_{1j}, h_{2j}, \dots, h_{mj})$, ապա $H^j \in R^m$;

$j=1,2,...,n$: e^i-ով նշանակենք R^m-ի միավոր վեկտորը, որի i–րդ բաղադրիչը հավասար է 1-ի, իսկ մնացած բաղադրիչները հավասար են 0-ի: R^m տարածության H^j, $j=1,2,...,n$ և $e^i, i=1,2,...,m$ այդպես սահմանված $n+m$ կետերի ուռուցիկ թաղանթը նշանակենք C–ով: C-ն փակ ուռուցիկ բազմանիստ է R^m-ում (տես սահմանումը): Հնարավոր է երկու դեպք. կամ սկզբնակետը պատկանում է C-ին, կամ չի պատկանում: Դիտարկենք երկու իրարամերժ դեպքեր. R^m տարածության սկզբնակետը կամ պատկանում է C բազմությանը կամ չի պատկանում::

1. $0 \notin C$: Այս դեպքում, քանի որ C-ն փակ ուռուցիկ բազմություն է և 0-ն չի պատկանում այդ բազմությանը, ապա ըստ անջատելիության թեորեմի (տես թեորեմ 2.1.4), 0 կետով կարելի է անց կացնել $\langle \lambda, z \rangle = 0$ հիպերհարթություն, այնպես, որ բոլոր $z \in C$ համար $\langle \lambda, z \rangle > 0$: Անալիտիկորեն դա նշանակում է, որ գոյություն ունեն $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ իրական թվեր, որոնք միաժամանակ 0 չեն, որ

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i > 0, z \in C \tag{6.3.1}$$

Եթե որպես z կետեր վերցնենք $e^i, i=1,2,...,m$ կետերը, ապա՝

$$\left\langle \lambda, e^i \right\rangle = \lambda_i > 0; \ \ i=1,2,...,m:$$

Նշանակենք՝

$$p_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{k=1}^{m} \lambda_k}; \ \ i=1,2,...,m:$$

Ակնհայտ է, որ $p_i > 0$; $i=1,2,...,m$, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$, հետևաբար, $p = (p_1, p_2, ..., p_m) \in S^m$:

Բաժանելով (6.3.1) անհավասարությունը $\sum_{i=1}^{m} p_i$ վրա, կստանանք՝

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i = \sum_{i=1}^{m} p_i z_i > 0:$$

Այս անհավասարության մեջ որպես z վերցնելով $H^j, j=1,2,...,n$ կետերը, վերջնականապես կստանանք՝

$$0<\sum_{i=1}^{m} p_i h_{ij} = H(p,j); \;\; j=1,2,...,n:$$

Այսպիսով, այն դեպքում, երբ $0 \notin C$, ստանում ենք լեմի առաջին երկընտրանքը:

2. $0 \in C$: Այս դեպքում սկզբնակետը կարելի է ներկայացնել C բազմության ծայրակետերի ուռուցիկ գծային կոմբինացիայի տեսքով: Քանի որ C բազմության ծայրակետերի բազմությունը $H^j, j=1,2,...,n$ $e^i, i=1,2,...,m$ վեկտորների բազմության ենթաբազմություն է, ապա սկզբնակետը կարելի է ներկայացնել հետևյալ կոմբինացիայի տեսքով

$$0=\sum_{k=1}^{m} \alpha_k e^k + \sum_{j=1}^{n} \beta_j H^j,$$

որտեղ

$$\alpha_k \ge 0,\; k=1,2,...,m;\; \beta_j \ge 0,\; j=1,2,...,n;\; \sum_{k=1}^{m} \alpha_k + \sum_{j=1}^{n} \beta_j = 1 \;:$$

Այս հավասարությունը վեկտորական է: Եթե այն գրենք ըստ կոորդինատների, կստանանք հավասարությունների հետևյալ համակարգը

$$0=\alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j h_{ij},\; i=1,2,...,m: \qquad (6.3.2)$$

Այստեղից, քանի որ բոլոր α_i-երը ոչ բացասական են, ապա

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j h_{ij} \le 0,\; i=1,2,...,m \qquad (6.3.3)$$

β_j, $j=1,2,...,n$ գործակիցները ոչ բացասական են և չեն կարող միաժամանակ հավասար լինեն զրոի, այլապես (6.3.2)-ից կհետևի, որ բոլոր $\alpha_i, i=1,2,...,m$

գործակիցները նույնպես հավասար են զրոի, ինչը կհակասի $\sum_{k=1}^{m}\alpha_k+\sum_{j=1}^{n}\beta_j=1$ պայմանին: Այսպիսով, $\sum_{j=1}^{n}\beta_j>0$: Նշանակենք՝

$$q_j=\frac{\beta_j}{\sum_{j=1}^{n}\beta_j}\ ,\ j=1,2,...,n:$$

Ակներև է, որ $q_j\ge o,\, j=1,2,...,n$ և $\sum_{j=1}^{n}q_j=1$, այսինքն, $q=(q_1,q_2,...,q_n)\in S^n$: Մյուս կողմից, բաժանելով (6.3.3) անհավասարությունները $\sum_{j=1}^{n}q_j$ -ի վրա, կստանանք

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^{n}\beta_j}\sum_{j=1}^{n}\beta_j h_{ij}=\sum_{j=1}^{n}q_j h_{ij}=H(i,q)\le 0,\ i=1,2,...,m:$$

Այսպիսով ապացուցեցինք լեմի երկրորդ այլընտրանքային պնդումը ևս:

Այժմ անցնենք մատրիցային խաղերի հիմնական թեորեմի ապացուցմանը:

Թեորեմ 6.3.1: *(ֆոն Նեյման-Մորգենշթերն): Ցանկացած վերջավոր հակամարտ խաղում գոյություն ունի հավասարակշռության իրավիճակ:*

<u>Ապացույց:</u> Դիցուք տրված է որևէ $m\times n$ չափերի H մատրիցով վերջավոր հակամարտ խաղ: Այդ մատրիցի համար պետք է բավարարվի երկընտրանքի վերաբերյալ լեմի այլընտրանքներից մեկը: Դիցուք կատարվում է լեմի առաջին այլընտրանքը, այսինքն գոյություն ունի այնպիսի $p\in S^m$ վեկտոր, որ $H(p,j)\ge 0$ բոլոր $j=1,2,...,n$ համար: Քանի որ այս անհավասարությունը տեղի ունի բոլոր $j=1,2,...,n$ համար, ապա, ըստ լեմ 6.3.1-ի, տեղի ունի նաև բոլոր $q\in S^n$ համար՝ $H(p,q)\ge 0$, հետևաբար, նաև $\min_{q\in S^n}H(p,q)\ge 0$: Այս անհավասարությունը ճիշտ է p կետի համար, հետևաբար՝

$$\max_{p\in S^m}\min_{q\in S^n}H(p,q)\ge 0 \qquad (6.3.4)$$

Այստեղ էքստրեմումի գոյությունը բխում է բազմությունների կոմպակտությունից:

Այն դեպքում, երբ H մատրիցի համար բավարարվում է 6.3.2 լեմի երկրորդ այլընտրանքը, այսինքն գոյություն ունի այնպիսի $q \in S^n$ վեկտոր, որ $H(i,q) \le 0$ բոլոր $i = 1, 2, ..., m$ համար, ապա, ինչպես և առաջին դեպքում, կստանանք, որ

$$\min_{q \in S^n} \max_{p \in S^m} H(p,q) \le 0 : \qquad (6.3.5)$$

Այսպիսով, ցանկացած H վերջավոր մատրիցի համար տեղի ունի կամ (6.3.4)-ը, կամ (6.3.5)-ը: Հետևաբար, ոչ մի մատրիցի համար հնարավոր չէ, որ միաժամանակ

$$\max_{p \in S^m} \min_{q \in S^n} H(p,q) < 0 \quad \text{և} \quad \min_{q \in S^n} \max_{p \in S^m} H(p,q) > 0 :$$

Այսինքն, ոչ մի մատրիցի համար չի կարող տեղի ունենալ հետևյալ կրկնակի անհավասարությունը

$$\max_{p \in S^m} \min_{q \in S^n} H(p,q) < 0 < \min_{q \in S^n} \max_{p \in S^m} H(p,q) : \qquad (6.3.6)$$

Դիցուք c–ն կամայական իրական թիվ է: H մատրիցի բոլոր տարրերից հանենք c-ն և ստացված մատրիցը նշանակենք H'-ով: Քանի որ (6.3.6) կրկնակի անհավասարությունը չի կարող տեղի ունենալ ոչ մի մատրիցի համար, ուստի այն չի կարող տեղի ունենալ նաև H' մատրիցի համար: Մյուս կողմից,

$$H'(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i (h_{ij} - c) q_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i h_{ij} q_j - c \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j = H(p,q) - c :$$

$$\max_{p \in S^m} \min_{q \in S^n} \left(H(p,q) - c \right) = \max_{p \in S^m} \min_{q \in S^n} H(p,q) - c,$$

$$\min_{q \in S^n} \max_{p \in S^m} \left(H(p,q) - c \right) = \min_{q \in S^n} \max_{p \in S^m} H(p,q) - c :$$

Այստեղից, ոչ մի H մատրիցի և ոչ մի իրական c թվի համար չի կարող տեղի ունենալ հետևյալ կրկնակի անհավասարությունը՝

$$\max_{p \in S^m} \min_{q \in S^n} H(p,q) - c < 0 < \min_{q \in S^n} \max_{p \in S^m} H(p,q) - c,$$

կամ

$$\max_{p\in S^m}\min_{q\in S^n} H(p,q) < c < \min_{q\in S^n}\max_{p\in S^m} H(p,q):$$

Հետևաբար ցանկացած H մատրիցի համար՝

$$\max_{p\in S^m}\min_{q\in S^n} H(p,q) \geq \min_{q\in S^n}\max_{p\in S^m} H(p,q):$$

Սակայն մյուս կողմից, երկու փոփոխականի ցանկացած ֆունկցիայի համար (տես լեմ 6.2.1)

$$\max_{p\in S^m}\min_{q\in S^n} H(p,q) \leq \min_{q\in S^n}\max_{p\in S^m} H(p,q):$$

Այսպիսով, ցանկացած H մատրիցի համար

$$\max_{p\in S^m}\min_{q\in S^n} H(p,q) = \min_{q\in S^n}\max_{p\in S^m} H(p,q): \tag{6.3.7}$$

Հաշվի առնելով, որ H-ը կամայական ֆիքսած մատրից էր, և կրկնակի էքստրեմումների հավասարությունը հավասարակշռության գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմանն է, թեորեմի պնդումը ապացուցված է:

Սահմանում 6.3.1: Մատրիցային H խաղում կրկնակի էքստրեմումների ընդհանուր արժեքը կոչվում է *խաղի արժեք* և նշանակվում է $V(H)$ -ով՝

$$V(H) = \max_{p\in S^m}\min_{q\in S^n} H(p,q) = \min_{q\in S^n}\max_{p\in S^m} H(p,q):$$

Բերենք խաղի արժեքի և խաղացողների օպտիմալ ստրատեգիաների մի շարք հատկություններ: Առաջին խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիաների բազմությունը նշանակենք $T_1(H)$-ով, երկրորդինը՝ $T_2(H)$-ով:

Հ.1. Ցանկացած H մատրիցային խաղում՝

$$\max_i \min_j h_{ij} \leq V(H) \leq \min_j \max_i h_{ij}:$$

Այս պնդումը հետևում է այն փաստից, որ մաքուր ստրատեգիաների բազմությունը խառն ստրատեգիաների բազմության ենթաբազմություն է:

Հ.2. Եթե որևէ $p \in S^m$ ստրատեգիայի և իրական c թվի համար

$$H(p, j) \geq c, \; j = 1, 2, \ldots, n,$$

ապա՝ $V(H) \geq c$:

Եթե որևե $q \in S^n$ ստրատեգիայի և իրական c թվի համար

$$H(i, q) \leq c, \; i = 1, 2, \ldots, m,$$

ապա՝ $V(H) \leq c$:

Սույն պնդման ապացույցը կրկնում է հիմնական թեորեմի ապացույցի սկզբնական մասը:

Հ.3. Դիցուք որևէ $p \in S^m$, $q \in S^n$ ստրատեգիաների և իրական c թվի համար

$$H(i, q') \leq c \leq H(p', j), \; i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n \; : \qquad (6.3.8)$$

Այդ դեպքում՝

$$p \in T_1(H), \; q \in T_2(H), \; c = V(H):$$

<u>Ապացույց:</u> Քանի որ (6.3.8) անհավասարության աջ մասը բավարարվում է բոլոր $j = 1, 2, \ldots, n$ համար, ապա ըստ խառն ստրատեգիաներին անցման լեմի, այն բավարարվում է նաև բոլոր $q \in S^n$ համար և, այդ թվում, q' ստրատեգիայի համար՝ $c \leq H(p', q')$: Նմանապես, (6.3.8) անհավասարության ձախ մասը բավարարվում է բոլոր $i = 1, 2, \ldots, m$ համար, հետևաբար, նաև բոլոր $p \in S^m$, և, այդ թվում, p'-ի համար՝ $c \geq H(p', q')$: Այսպիսով, $c = H(p', q')$ և բավական է (6.3.8) անհավասարության մեջ c-ի փոխարեն տեղադրել $H(p', q')$:

Հ.4. Որպեսզի $p' \in T_1(H)$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$H(p', j) \geq V(H), \; j = 1, 2, \ldots, n: \qquad (6.3.9)$$

Որպեսզի $q' \in T_2(H)$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$H(i, q') \leq V(H), \; i = 1, 2, \ldots, m:$$

Ապացույց: Ապացուցենք հատկության միայն առաջին մասը: Անհրաժեշտությունը անմիջականորեն հետևում է հավասարակշռության իրավիճակի սահմանումից: Մյուս կողմից, մատրիցային խաղերի հիմնական թեորեմից հետևում է, որ $T_2(H)$-ը դատարկ չէ: Դիցուք՝ $q' \in T_2(H)$: Այս դեպքում, քանի որ q'-ը օպտիմալ է, ապա

$$H(i, q') \leq V(H), \; i = 1, 2, \ldots, m:$$

Միացնելով այս անհավասարությունը (6.3.9) անհավասարության հետ, խնդիրը կբերվի նախորդ հատկությանը:

Թեորեմ 6.3.2: *Դիցուք j_0-ն երկրորդ խաղացողի որևէ մաքուր ստրատեգիա է $m \times n$ չափսերի H մատրիցային խաղում: Այդ դեպքում կամ առաջին խաղացողն ունի այնպիսի $p^0 \in T_1(H)$ օպտիմալ ստրատեգիա, որ $H(p^0, j_0) > V(H)$, կամ երկրորդ խաղացողն ունի $q^0 \in T_2(H)$ օպտիմալ ստրատեգիա, որի j_0-րդ բաղադրիչը հավասար է զրոի՝ $q^0_{j_0} = 0$:*

Ապացույց: Ընդհանրությունը չխախտելով կարելի է ենթադրել, որ $V(H) = 0$ և $j_0 = n$: Դիտարկենք C ուռուցիկ կոնը, որը ծնված է R^m տարածության միավոր $e^{(i)}, i = 1, 2, \ldots, m$ վեկտորներով և H մատրիցի $H^j, j = 1, 2, \ldots, n$ սյուներով: Դիտարկենք երկու դեպք՝ $-H^n$ վեկտորը կամ պատկանում է C կոնին, կամ չի պատկանում: Եթե $-H^n \in C$, ապա գոյություն ունեն այնպիսի ոչ բացասական $\alpha_i, i = 1, 2, \ldots, m$; $\beta_j, j = 1, 2, \ldots, n-1$ թվեր, որ

$$-H^n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e^{(i)} + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j H^j,$$

կամ

$$-h_{kn}=\alpha_k+\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j h_{kj},\ k=1,2,...,m:$$

Սա նշանակում է, որ

$$\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j h_{kj}+h_{kn}=-\alpha_k\le 0,\ k=1,2,...,m:$$

Նշանակենք՝

$$q_j^0=\frac{\beta_j}{1+\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j},\ \ j=1,2,...,n-1\,;\ q_n^0=\frac{1}{1+\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j}:$$

Ակնհայտ է, որ $q_j^0\ge 0,\ j=1,2,...,n;\ \sum_{j=1}^{n}q_j^0=1$, այսինքն, $q^0=\left(q_1^0,q_2^0,...,q_n^0\right)\in S^n$ և բոլոր $i=1,2,...,m$ համար

$$H\left(q^0,i\right)=\sum_{j=1}^{n}q_j^0 h_{ij}=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\beta_j}{1+\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j}h_{ij}+\frac{1}{1+\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j}h_{in}=\frac{1}{1+\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j h_{ij}+h_{in}\right)\le 0:$$

Հետևաբար, ըստ Հ.4-ի, $q^0\in T_2\left(H\right)$ և $q_n^0>0$:

Այժմ ենթադրենք, որ $-H^n\notin C$: Այս դեպքում, քանի որ սկզբնակետը ուռուցիկ կոնի ծայրակետ է, ապա, ըստ անջատելիության թեորեմի, սկզբնակետով կարելի է անց կացնել հիպերհարթություն, որն անջատում է $-H^n$ վեկտորը C կոնից: Դա նշանակում է, որ գոյություն ունեն այնպիսի $\lambda_i,\ i=1,2,...,m$ թվեր, որոնք միաժամանակ զրո չեն, որ բոլոր $z=\left(z_1,z_2,...,z_m\right)\in C$ համար

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i z_i\ge 0 \tag{6.3.10}$$

և

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(-h_{in}\right)<0: \tag{6.3.11}$$

Եթե որպես $z \in C$ կետեր վերցնենք բոլոր $e^{(i)}, i=1,2,...,m$ վեկտորները, ապա կստանանք, որ $\lambda_i \geq 0,\ i=1,2,...,m$ և, հետևաբար, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i > 0$: Նշանակենք՝ $p_i^0 = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i}$:

Անմիջականորեն ստուգվում է, որ $p_i^0 \geq 0,\ i=1,2,...,m; \sum_{i=1}^{m} p_i^0 = 1$: Այժմ, եթե (6.3.10) անհավասարությունները բաժանենք $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i$ վրա, և որպես $z \in C$ կետեր վերցնենք $H^j,\ j=1,2,...,n$ վեկտորները, ապա՝

$$\sum_{i=1}^{m} p_i^0 h_{ij} = H\left(p^0, j\right) \geq 0 = V\left(H\right),\ j=1,2,...,n:$$

Հետևաբար, $p^0 = \left(p_1^0, p_2^0, ..., p_m^0\right) \in T_1\left(H\right)$ ստրատեգիան օպտիմալ է, իսկ (6.3.11)-ից կստանանք $\sum_{i=1}^{m} p_i^0 h_{in} > 0$:

Հետևանք: Դիցուք $p^0 \in S^m$ և որևէ j_0 -ի համար $H\left(p^0, j_0\right) > V\left(H\right)$: Այս դեպքում երկրորդ խաղացողն ունի օպտիմալ $q^0 = \left(q_1^0, q_2^0, ..., q_n^0\right)$ ստրատեգիա, որտեղ $q_j^0 = 0$: Եվ հակառակը, եթե երկրորդ խաղացողի բոլոր օպտիմալ ստրատեգիաներում j_0 բաղադրիչը հավասար է զրոի, ապա $p^0 \in S^m$ համար՝ $H\left(p^0, j_0\right) > 0$: Դիցուք $q^0 \in S^n$ և որևէ i_0 համար $H\left(i_0, q^0\right) < V\left(H\right)$: Այս դեպքում առաջին խաղացողն ունի օպտիմալ $p^0 = \left(p_1^0, p_2^0, ..., p_n^0\right)$ ստրատեգիա, որտեղ $p_j^0 = 0$: Եվ հակառակը, եթե առաջին խաղացողի բոլոր օպտիմալ ստրատեգիաներում i_0 բաղադրիչը հավասար է զրոի, ապա $q^0 \in S^n$ ստրատեգիայի համար $H\left(i_0, q^0\right) < V\left(H\right)$:

Վերը շարադրված հատկությունները որոշ դեպքերում օգնում են լուծել մատրիցային խաղերը:

Օրինակ 6.3.1: Դիտարկենք հետևյալ խաղը: Երկու խաղացողները միմիանցից անկախ ընտրում են $\{1,2,3,4,5\}$ բազմության թվերից մեկը: Շահույթի $H\left(i, j\right)$ ֆունկցիան հավասար է $|i-j|$: Այս խաղը կարելի է ներկայացնել 5×5 չափսի մատրիցի տեսքով՝

$$H=\begin{pmatrix}0&1&2&3&4\\1&0&1&2&3\\2&1&0&1&2\\3&2&1&0&1\\4&3&2&1&0\end{pmatrix}:$$

Հեշտ է տեսնել, որ այս խաղում $\max_i \min_j h_{ij}=0$, և $\min_j \max_i h_{ij}=2$, ուստի հավասարակշռության իրավիճակ մաքուր ստրատեգիաներում գոյություն չունի: Ըստ Հ1 հատկության՝ $0\le v(H)\le 2$: Նայելով խաղի պայմաններին, կարելի է գուշակել, որ երկրորդ խաղացողը պետք է ընտրի միջին թիվը՝ 3-ը, իսկ առաջին խաղացողը՝ ծայրի թվերը: Ստուգենք երկրորդ խաղացողի մաքուր՝ $j^0=3$ և առաջին խաղացողի խառն՝ $p^0=(0,5;0;0;0;0,5)$ ստրատեգիաները: Հաշվենք՝

$$H\left(p^0,3\right)=2;\ H\left(p^0 j\right)=2,\ j=1,2,3,4,5;\ H(i,3)\le 2, i=1,2,3,4,5\ :$$

Այսպիսով,

$$H(i,3)\le H\left(p^0,3\right)\le H\left(p^0 j\right), i=1,2,3,4,5;\ j=1,2,3,4,5:$$

Հետևաբար, ըստ Հ.3 հատկության, $j^0=3$ և $p^0=(0,5;0;0;0;0,5)$ ստրատեգիաները օպտիմալ են այս խաղում և $v(H)=2$:

Որոշ մասնավոր դեպքերում մատրիցային խաղերը կարելի է լուծել գրաֆիկորեն: Դիտարկենք $(2\times n)$ չափսի մատրիցային խաղ՝

$$H=\begin{pmatrix}h_{11}&h_{12}&.&.&.&h_{1n}\\h_{21}&h_{22}&.&.&.&h_{2n}\end{pmatrix}:$$

Այստեղ առաջին խաղացողի խառը ստրատեգիան կարելի է ներկայացնել $(p,1-p)$ տեսքով և խաղի արժեքը կստանա հետևյալ տեսքը՝

$$v(H)=\max_p \min_j H(p,j)=\max_p \min_j\left(ph_{1j}+(1-p)h_{2j}\right):$$

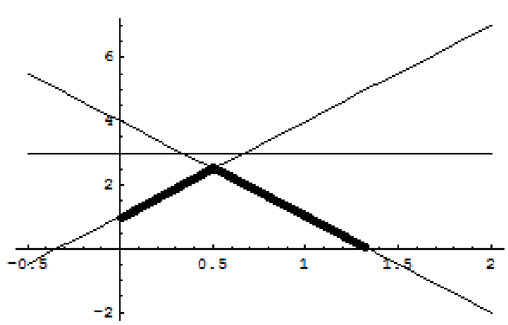
(v,p) կոորդինատային հարթության մեջ անց կացնենք $v = ph_{1j} + (1-p)h_{2j},\ j = 1,2,\ldots,n$ ուղիղները և գտնենք $v = \min_j \left(ph_{1j} + (1-p)h_{2j}\right)$ բեկյալը: Ակներև է, որ այս բեկյալի առավելագույն արժեքը ըստ $p \in [0,1]$ հավասար կլինի խաղի արժեքին, իսկ առաջին խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիան հավասար է $\left(p^0, 1-p^0\right)$, որտեղ p^0-ն այն կետն է, որտեղ բեկյալը հասնում է իր առավելագույն արժեքին: Երկրորդ խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիան կարելի է գտնել, օգտվելով օպտիմալ ստրատեգիաների և խաղի արժեքի հատկություններից:

Օրինակ 6.3.2:

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}:$$

(p,v) կոորդինատային հարթության վրա գծենք $H(p,j) = v;\ j = 1,2,3$ ուղիղները (տես նկ. 6.3.1) `

$$v = 4p + (1-p),$$
$$v = 3p + 3(1-p),$$
$$v = p + 4(1-p):$$



Նկար 6.3.1

Նկարի վրա հաստ գծով նշված է $v=\min_j H(p,j)$ բեկյալը: Գծագրից երևում է, որ բեկյալի մաքսիմումը $p\in[0,1]$ տիրույթում համապատասխանում է $v=H(p,1)$ և $v=H(p,3)$ ուղիղների հատման կետին: Համատեղ լուծելով $v=4p+(1-p)$ և $v=p+4(1-p)$ հավասարումները, ստանում ենք՝ $p^0=0,5; v^0=2,5$: Այսպիսով՝ $v(H)=2,5$, իսկ առաջին խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիան $(0,5;0,5)$ խառն ստրատեգիան է:

Այժմ գտնենք երկրորդ խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիան: Հաշվենք $H(p^0,j),\ j=1,2,3$ շահույթները՝

$H(p^0,1)=0,5\cdot 4+0,5\cdot 1=2,5$; $H(p^0,2)=0,5\cdot 3+0,5\cdot 3=3$; $H(p^0,3)=0,5\cdot 1+0,5\cdot 4=2,5$:

Քանի որ $H(p^0,2)=3>v(H)$, ապա, ըստ թեորեմ 6.3.2 -ի, երկրորդ խաղացողի $q^0=(q_1^0,q_2^0,q_3^0)$ օպտիմալ ստրատեգիայում $q_2^0=0$, իսկ q_1^0 և q_3^0 բաղադրիչները կարելի է ստանալ հավասարումների հետևյալ համակարգից՝

$$\begin{cases} 4q_1+q_3=2,5 \\ q_1+4q_3=2,5 \end{cases}:$$

Լուծելով այն, ստանում ենք՝ $q_1^0=0,5;\ q_3^0=0,5$: Այդպիսով, երկրորդ խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիան $(0,5;0;0,5)$ խառն ստրատեգիան է:

Օրինակ 6.3.3: Անկյունագծային խաղեր: Դիտարկենք մատրիցային խաղ, որի մատրիցն ունի անկյունագծային տեսք՝

$$H=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & a_n \end{pmatrix},$$

որտեղ $a_i>0, i=1,2,\dots,n$: Գնահատենք խաղի արժեքը: Դիցուք առաջին խաղացողն ընտրել է $\bar{p}=(1/n,1/n,\dots,1/n)$ ստրատեգիան: Այս դեպքում բոլոր $i=1,2,\dots,n$ համար $H(\bar{p},j)=\frac{1}{n}a_j>0$, հետևաբար, ըստ Հ.2 հատկության՝ $V(H)>0$: Եթե առաջին խաղացողի օպտիմալ $p^0 = \left(p_1, p_2, ..., p_n\right)$ ստրատեգիայում որևէ բաղադրիչ, օրինակ i_0 բաղադրիչը, հավասար է զրոի, ապա՝ $H\left(p^0, i_0\right) = 0$: Սա հակասում է Հ.4 հատկությանը, քանի որ $V\left(H\right) > 0$: Այսպիսով, առաջին խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիայի բոլոր բաղադրիչները պետք է լինեն խիստ դրական: Հետևաբար, ըստ 6.3.2 թեորեմի հետևանքի, եթե երկրորդ խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիան նշանակենք $q^0 = \left(q_1, q_2, ..., q_n\right)$, ապա՝ $H\left(i, q^0\right) = V\left(H\right), i = 1, 2, ..., n$: Միացնելով այս գծային հավասարումների համակարգին նաև $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$ հավասարումը, կստանանք $n+1$ փոփոխականներով $n+1$ հատ գծային հավասարումների հետևյալ համակարգը

$$\begin{cases} a_1 q_1 = v\,, \\ a_2 q_2 = v\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_n q_n = v\,, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} q_i = 1: \end{cases}$$

Հեշտ է ստուգել, որ համակարգի լուծումը հետևյալն է՝

$$q_i = \frac{1}{a_i \sum\limits_{i=1}^{n} 1/a_i}\,, \quad i = 1, 2, ..., n; \quad V\left(H\right) = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} 1/a_i}:$$

Այստեղից հետևում է, որ երկրորդ խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիաի բոլոր բաղադրիչները խիստ դրական են, հետևաբար, օգտվելով նույն հատկությունից, երկրորդ խաղացողի $p^0 = \left(p_1, p_2, ..., p_n\right)$ օպտիմալ ստրատեգիաի համար կստանանք ՝

$$p_i = \frac{1}{a_i \sum\limits_{i=1}^{n} 1/a_i}\,, \qquad i = 1, 2, ..., n:$$

Օրինակ 6.3.4: Դիտարկենք *հարձակում-պաշտպանություն* տեսքի մի վերջավոր խաղ: Դիցուք ունենք n օբեկտներ, որոնք պաշտպանության կարիք ունեն: Դա կարող են լինել ինչպես ռազմական կամ տնտեսական, այնպես էլ ինֆորմացիոն բնույթի: Հարցակվողը (առաջին խաղացող) հարցակվում է այդ օբյեկտներից մեկի վրա: Պաշտպանը (երկրորդ խաղացող) այդ պահին կարող է պաշտպանել օբեկտներից միայն մեկը: Ենթադրենք, որ i-րդ օբեկտի արժեքը a_i-է, $a_i > 0$, $i = 1, 2, ..., n$, իսկ հարցակման գինը - $b > 0$: Այս իրավիճակը կարելի է ներկայացնել մատրիցային խաղի տեսքով՝

$$H = \begin{pmatrix} -b & a_1 - b & a_1 - b & \dots & a_1 - b \\ a_2 - b & a_2 - b & a_2 - b & \dots & a_2 - b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n - b & a_n - b & a_n - b & \dots & a_n - b \end{pmatrix}:$$

Ստրատեգիապես համարժեք խաղերի վերաբերյալ թեորեմից հետևում է, որ խաղը համարժեք է H' մատրիցով խաղին՝

$$H' = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & 0 & a_2 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_n & a_n & \dots & 0 \end{pmatrix}:$$

Հաշվենք կրկնակի էքստրեմումները՝

$$\max_i \min_j h'_{ij} = 0, \ \min_j \max_i h'_{ij} = \max\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}:$$

Այսպիսով, H' խաղում չկա հավասարության իրավիճակ մաքուր ստրատեգիաներում, հետևաբար խաղացողները պետք է կիրառեն խառն ստրատեգիաներ: Փորցենք գտնել $p^0 = \left(p_1^0, p_2^0, ..., p_n^0\right)$, $q^0 = \left(q_1^0, q_2^0, ..., q_n^0\right)$ ստրատեգիաներ, որոնք կբավարարեն

$$H'\left(i, q^0\right) = v = H'\left(p^0, j\right), \ i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., n$$

հավասարումների համակարգին: Ակներև է, որ եթե ստանանք v, p^0 և q^0 լուծումներ, որոնք բավարարեն $p^0 \in S_n, q^0 \in S_n$ պայմաններին, ապա, ըստ օպտիմալ ստրատեգիաների 3-րդ հատկության, p^0-ն և q^--ն կլինեն օպտիմալ ստրատեգիաներ, իսկ v–ն՝ խաղի արժեք ։ Կազմենք $H\left(p^0, j\right)=v$, $j=1,2,...,n$ հավասարումների համակարգը՝

$$\begin{cases} \sum\limits_{i\neq 1} p_i a_i = v, \\ \sum\limits_{i\neq 2} p_i a_i = v, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{i\neq n} p_i a_i = v, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1: \end{cases}$$

Այս համակարգը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_i = v - p_k a_k,\ k=1,2,...,n$$
$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1:$$

Որտեղից՝

$$p_k^0 = \frac{1}{a_k \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}},\ \ k=1,2,...,n;\ \ v=\frac{n-1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}:$$

Այժմ դիտարկենք $H'(i,q)=v, i=1,2,...,n$ համակարգը՝

$$\begin{cases} a_1 \sum\limits_{j\neq 1} q_j = v, \\ a_2 \sum\limits_{j\neq 2} q_j = v, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n \sum\limits_{j\neq n} q_j = v, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1: \end{cases}$$

Այն կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{cases} a_k\left(1-q_k\right)=v, k=1,2,\dots,n \\ \sum_{j=1}^{n} q_j=1: \end{cases}$$

Որտեղից՝

$$q_k^0=1-\frac{n-1}{a_k\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}},\quad k=1,2,\dots,n:$$

Դժվար չէ ստուգել, որ $p^0\in S_n$, սակայն q^0–ի պատկանելիությունը S_n-ին պետք է ստուգվի: Մասնավորապես դիտարկենք $n=3$ դեպքը և ենթադրենք, որ $a_1>a_2>a_3>1$: Տարանջատենք երկու դեպք.1. $a_3>\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}$ և 2. $a_3\le\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}$:Առաջին դեպքում՝

$$q_1^0=1-\frac{2}{a_1\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)}=1-\frac{2}{1+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_1}{a_3}}\ge1-\frac{2}{1+1+1}>0,$$

$$q_2^0=1-\frac{2}{a_2\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)}=1-\frac{2}{1+\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_2}{a_3}}\ge1-\frac{2}{1+1+\frac{a_2}{a_1}}>0,$$

$$q_3^0=1-\frac{2}{a_3\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)}=1-\frac{2}{1+a_3\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)}\ge1-\frac{2}{1+a_3\frac{a_1+a_2}{a_1a_2}}>0$$

և, հետևաբար, $q_i^0>0, i=1,2,3,$ այսինքն՝ $q^0\in S_n$, և

$$V\left(H'\right)=\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}}:$$

Երկրորդ դեպքում, երբ $a_3 \le \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}$, օգտվելով 6.3.2 թեորեմից, օպտիմալ ստրատեգիաները փնտրենք $p^* = \left(p_1^*, p_2^*, 0\right), q^* = \left(q_1^*, q_2^*, 0\right)$ տեսքով: Լուծելով

$$\begin{aligned} &p_1^* a_2 = v, \qquad q_2^* a_1 = v, \\ &p_2^* a_1 = v, \qquad q_1^* a_2 = v, \\ &p_1^* + p_2^* = 1, \quad q_1^* + q_2^* = 1 \end{aligned}$$

հավասարումների համակարգը, կստանանք՝

$$p_1^* = \frac{a_2}{a_1 + a_2}, q_1^* = \frac{a_1}{a_1 + a_2}, v^* = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}:$$

Հաշվենք $H'\left(p^*, j\right), j = 1,2,3$ և $H'\left(i, q^*\right), i = 1,2,3$ արժեքները՝

$$H'\left(p^*,1\right) = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} = v^*, H'\left(p^*,2\right) = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} = v^*, H'\left(p^*,3\right) = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} + \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} > v,$$
$$H'\left(q^*,1\right) = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} = v^*, H'\left(q^*,2\right) = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} = v^*, H'\left(q^*,3\right) = q_1^* a_3 + q_2^* a_3 = a_3 \le \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} = v:$$

Այսպիսով, երկրորդ դեպքում, օգտվելով օպտիմալ ստրատեգիաների վերաբերյալ երրորդ հատկությունից, ստանում ենք, որ $\left(p^*, q^*\right)$ իրավիճակը հավասարակշռության իրավիճակ է, և

$$V\left(H'\right) = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}, \ V\left(H\right) = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} - b:$$

Ընդհանուր դեպքում, երբ n-ը կամայական է, պահանջվում է նմանատիպ վերլուծություն:

Հետևյալ թեորեմը ամբողջությամբ նկարագրում է օպտիմալ ստրատեգիաների բազմությունները:

Թեորեմ 6.3.3: *Մատրիցային խաղերում խաղացողների օպտիմալ ստրատեգիաների* $T_1\left(H\right), T_2\left(H\right)$ *բազմությունները ոչ դատարկ, փակ, սահմանափակ և ուռուցիկ բազմություններ են:*

__Ապացույց:__ Բազմությունների ոչ դատարկ լինելը հաստատվել է (6.3.1) թեորեմով: $T_1(H), T_2(H)$ բազմությունների սամանափակությունը հետևում է այն փաստից, որ այս բազմությունները համապատասխանաբար S^m և S^n սահմանափակ բազմությունների ենթաբազմություններ են: Ապացուցենք ոռուցիկությունը: Դիցուք $p', p'' \in T_1(H)$ և $\alpha \in (0,1)$: S^m բազմության ոռուցիկությունից հետևում է, որ $p''' = \alpha p' + (1-\alpha) p'' \in S^m$: Ցույց տանք, որ p''' ստրատեգիան օպտիմալ է: Իրոք, բոլոր $j = 1, 2, \ldots, n$ համար

$$H(p''', j) = \alpha H(p', j) + (1-\alpha) H(p'', j) \geq \alpha V(H) + (1-\alpha) V(H) = V(H):$$

Այստեղից, ըստ Հ.4-ի, $p''' \in T_1(H)$:

Այժմ ցույց տանք փակությունը: Վերցնենք $T_1(H)$ բազմության $p^1, p^2, \ldots, p^k, \ldots$ կետերի հաջորդականություն, որը զուգամիտում է p^0 կետին: Քանի որ հաջորդականության կետերը պատկանում են նաև S^m բազմությանը, որը փակ է, ապա p^0 կետը նույնպես կպատկանի S^m-ին: $H(p, j)$ ֆունկցիան գծային է ըստ p-ի, հետևաբար, բոլոր $j = 1, 2, \ldots, n$ համար

$$\lim_{k \to \infty} H\left(p^k, j\right) = H\left(p^0, j\right),$$

և քանի որ, $p^k \in T_1(H)$, ապա բոլոր $j = 1, 2, \ldots, n$ համար $H\left(p^k, j\right) \geq V(H)$, $k = 1, 2, \ldots$, ուստի՝ $H\left(p^0, j\right) \geq V(H)$: Մնում է նորից կիրառել Հ.4 հատկությունը:

Նման եղանակով ապացուցվում է $T_2(H)$ բազմության ուռուցիկությունը և փակությունը:

Հետևանք: Ցանկացած մատրիցային խաղում կամ գոյություն ունի միակ օպտիմալ ստրատեգիա, կամ դրանք անվերջ շատ են: Այս փաստը անմիջապես բխում է $T_1(H)$ և $T_2(H)$ բազմությունների ուռուցիկությունից:

Դիտարկենք օպտիմալ ստրատեգիաների ևս մեկ հատկություն, որը հաճախ հեշտացնում է խաղերի լուծումը:

Սահմանում 6.3.2: Կասենք, որ առաջին խաղացողի i–րդ մաքուր ստրատեգիան *գերադասելի է* k-րդ մաքուր ստրատեգիայից և կնշանակենք՝ $i \succ k$, եթե բոլոր j–երի համար $h_{ij} \geq h_{kj}$, ընդ որում այս անհավասարություններից առնվազն մեկը խիստ է: Նմանապես, երկրորդ խաղացողի j–րդ մաքուր ստրատեգիան *գերադասելի է* l-րդ մաքուր ստրատեգիայից և կնշանակենք՝ $j \succ l$, եթե բոլոր i–երի համար $h_{ij} \leq h_{il}$, ընդ որում այս անհավասարություններից առնվազն մեկը խիստ է: Հետևյալ թեորեմը բերենք առանց ապացուցման:

Թեորեմ 6.3.4: *Դիցուք մատրիցային խաղում առաջին խաղացողի i–րդ մաքուր ստրատեգիան գերադասելի է k-րդ մաքուր ստրատեգիայից՝ $i \succ k$: Այս դեպքում առաջին խաղացողն ունի օպտիմալ $p^0 = \left(p_1^0, p_2^0, ..., p_m^0\right)$ ստրատեգիա, որտեղ $p_k^0 = 0$: Եթե երկրորդ խաղացողի j–րդ մաքուր ստրատեգիան գերադասելի է l-րդ մաքուր ստրատեգիայից՝ $j \succ l$, ապա երկրորդ խաղացողն ունի օպտիմալ $q^0 = \left(q_1^0, q_2^0, ..., q_n^0\right)$ ստրատեգիա, որտեղ $q_l^0 = 0$: Բացի այդ, օպտիմալ ստրատեգիաների դրական բաղադրիչները կարելի է գտնել այն խաղում, որը ստացվում է սկզբնական խաղից դուրս զցելով գերադասվող մաքուր ստրատեգիաներին համապատասխանող տողերը կամ սյուները:*

Դիտարկենք մատրիցային խաղերի մի կարևոր մասնավոր դեպք:

Սահմանում 6.3.3: H մատրիցային խաղն անվանում են սիմետրիկ, եթե H մատրիցը շեղսիմետրիկ է, այսինքն, բոլոր i, j -ի համար $h_{ij} = -h_{ji}$:

Թեորեմ 6.3.5: *Սիմետրիկ խաղերում $V\left(H\right) = 0$ և $T_1\left(H\right) = T_2\left(H\right)$:*

<u>Ապացույց:</u> Դիցուք տրված է H սիմետրիկ խաղ: Սահմանումից հետևում է, որ H մատրիցը քառակուսի մատրից է: Ենթադրենք այն $n \times n$ չափսերի է: Քառակուսի մատրիցով խաղում խաղացողների ստրատեգիաների բազմությունները նույնն են՝ S^n բազմությունն է: Դիցուք երկու խաղացողներն էլ ընտրում են միևնույն $p \in S^n$ ստրատեգիան: Այս դեպքում

$$H\left(p, p\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_i h_{ij} p_j = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_i h_{ji} p_j = -\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_j h_{ji} p_i = -H\left(p, p\right) = 0:$$

Դիտարկենք խաղացողի շահույթը որևէ (p,q) իրավիճակում: Ցանկացած $p \in S^n$ ստրատեգիայի դեպքում, ընտրելով որպես q նույն այդ ստրատեգիան շահույթը հավասար կլինի զրոի: Հետևաբար, $\min_{q \in S^n} H(p,q) \le 0$ և, քանի որ այս անհավասարությունը ճիշտ է ցանկացած $p \in S^n$ համար, ապա

$$\max_{p \in S^n} \min_{q \in S^n} H(p,q) \le 0:$$

Մյուս կողմից, եթե առաջին խաղացողն ընտրի $p = q$, ապա շահույթը հավասար կլինի զրոի, հետևաբար, $\max_{p \in S^n} H(p,q) \ge 0$ և, քանի որ այս անհավասարությունը ճիշտ է ցանկացած q-ի համար, ապա

$$\min_{q \in S^n} \max_{p \in S^n} H(p,q) \ge 0:$$

Միացնելով այս երկու անհավասարությունները, կստանանք թեորեմի առաջին պնդումը՝ $V(H) = 0$:

Դիցուք, այժմ, $p \in T_1(H)$ առաջին խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիան է: Օպտիմալ ստրատեգիաի սահմանումից բոլոր $j = 1, 2, \ldots, n$ համար

$$H(p, j) = \sum_{i=1}^{n} p_i h_{ij} \ge V(H) = 0:$$

Տեղադրելով $h_{ij} = -h_{ji}$, կստանանք՝

$$-\sum_{i=1}^{n} p_i h_{ji} \ge 0$$

և

$$\sum_{i=1}^{n} h_{ji} p_i = H(j, p) \le 0 = V(H)$$

բոլոր $j = 1, 2, \ldots, n$ համար: Հետևաբար, ըստ Հ.4-ի, $p \in T_2(H)$ և $T_1(H) \subseteq T_2(H)$: Նույն եղանակով ցույց է տրվում, որ $T_1(H) \supseteq T_2(H)$:

Մատրիցային խաղերի լուծման ընդհանուր եղանակ: Դիցուք տրված է $m \times n$ չափսերի H մատրիցային խաղ: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարելի է ենթադրել, որ $h_{ij} > 0$ բոլոր i, j համար: Մատրիցային խաղը լուծել նշանակում է գտնել խաղի արժեքը՝ $V(H)$-ն և խաղացողների օպտիմալ ստրատեգիաների $T_1(H)$ և $T_2(H)$ բազմությունները: Քանի որ

$$V(H) = \max_{p \in S^m} \min_j H(p, j) = \min_{q \in S^n} \max_i H(i, q) \quad , \tag{6.3.12}$$

$$T_1(H) = Arg \max_{p \in S^m} \min_j H(p, j),$$

$$T_2(H) = Arg \min_{q \in S^n} \max_i H(i, q),$$

ապա խաղը լուծելու համար բավական է հաշվել (6.3.12) կրկնակի էքստրեմումները:

Կամայական $p = (p_1, p_2, ..., p_m) \in S^m$-ի համար նշանակենք՝ $v_p = \min_j H(p, j)$: Այստեղից՝

$$V(H) = \min_j H(p, j), \; T_1(H) = Arg \max_{p \in S^m} v_p \, ,$$

$$v_p \le H(p, j) = \sum_{i=1}^{m} p_i h_{ij}, \; j = 1, 2, ..., n: \tag{6.3.13}$$

Քանի որ բոլոր $h_{ij} > 0$ և $p_i \ge 0$, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$, ապա $v_p > 0$ ցանկացած $p \in S^m$ համար: Բաժանենք (6.3.13) անհավասարության երկու մասերը v_p-ի վրա և նշանակենք $x_i = p_i / v_p$: Կստանանք՝

$$\sum_{i=1}^{m} x_i h_{ij} \ge 1, \quad j = 1, 2, ..., n \tag{6.3.14}$$

Մյուս կողմից,

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i}{v_p} = \frac{1}{v_p} :$$

Այստեղից, v_p ֆունկցիայի մաքսիմում գտնելու խնդիրը բերվում է $\sum_{i=1}^{m} x_i$ մինիմում գտնելու խնդրին , որտեղ փոփոխականները բավարարում են (6.3.14) պայմաններին:

Դիտարկենք գծային ծրագրման հետևյալ խնդիրը

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_i \to \min, \\ \sum_{i=1}^{m} x_i h_{ij} \ge 1,\ j = 1, 2, \dots, n, \\ x_i \ge 0, i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \qquad (6.3.15)$$

Դժվար չէ ստուգել, որ այս խնդիրը սահմանափակ է և թույլատրելի: Դիցուք այս խնդրի լուծումը $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0\right)$-ն է: Հաշվի առնելով մեր նշանակումները, կստանանք՝

$$V\left(H\right) = \max_{p \in S^m} v_p = \frac{1}{\min \sum_{i=1}^{m} x_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i^0} :$$

Իսկ առաջին խաղացողի օպտիմալ $p^0 = \left(p_1^0, p_2^0, \dots, p_m^0\right)$ ստրատեգիայի համար՝

$$p_i^0 = x_i^0 \cdot V\left(H\right) = \frac{x_i^0}{\sum_{i=1}^{m} x_i^0}, i = 1, 2, \dots, m :$$

Նույն եղանակով, երկրորդ խաղացողի $q^0 = \left(q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0\right)$ օպտիմալ ստրատեգիան և խաղի արժեքը գտնելու համար բավական է լուծել գծային ծրագրման հետևյալ խնդիրը

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} y_j \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} y_j \le 1, i = 1, 2, \ldots, m, : \\ y_j \ge 0,\ j = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \tag{6.3.16}$$

Եթե այս խնդրի լուծումը նշանակենք $y^0 = \left(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0\right)$ -ով, ապա

$$V(H) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} y_j^0}, \qquad q_j^0 = \frac{y_j^0}{\sum_{j=1}^{n} y_j^0},\ j = 1, 2, \ldots, n\ :$$

(6.3.15) և (6.3.16) խնդիրները երկակի խնդիրներ են (տես 4.2 բաժինը): Այսպիսով, մատրիցային խաղի լուծումը բերվում է գծային ծրագրման երկակի խնդիրների զույգի լուծմանը:

Մատրիցային խաղերի և գծային ծրագրման կապը ավելի ակնառու դարձնելու համար բերենք գծային ծրագրման հիմնական՝ 4.2.2 թեորեմի մեկ այլ ապացույց: Դիցուք տրված է գծային ծրագրման երկակի խնդիրների զույգ՝

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = 1, \ldots, m, \\ x_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, n : \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min, \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j,\ j = 1, 2, \ldots, n, \\ y_i \ge 0, i = 1, 2, \ldots, m : \end{cases}$$

Թեորեմ 4.2.2*: *Եթե գծային ծրագրման երկակի խնդիրների զույգից յուրաքանչյուրը թույլատրելի է, ապա երկուսն էլ ունեն լուծում, ընդ որում նպատակային ֆունկցիաների էքստրեմալ արժեքները հավասար են:*

Ապացույց: Դիտարկենք H մատրիցով հետևյալ մատրիցային խաղը՝

$$H=\begin{pmatrix} 0.......0 & a_{11}...a_{1n} & -b_1 \\ .... & .... & .... \\ 0.......0 & a_{m1}...a_{mn} & -b_m \\ -a_{11}...-a_{m1} & 0.......0 & c_1 \\ .... & .... & ... \\ -a_{1n}...-a_{mn} & 0.......0 & c_n \\ b_1.........b_m & -c_1...-c_n & 0 \end{pmatrix}:$$

Դժվար չէ ստուգել, որ այս խաղը սիմետրիկ խաղ է (տես սահմանում 6.3.3)։ Ըստ թեորեմ 6.3.5-ի այս խաղի արժեքը հավասար է զրոի՝ $v(H)=0$, իսկ խաղացողների օպտիմալ ստրատեգիաների բազմությունները համընկնում են։ Եթե առաջին խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիան նշանակենք $s=(s_1,s_2,...,s_{n+m+1})$-ով, ապա՝ $H(s,k)\geq v(H)=0;\ k=1,2,...,n+m+1$։ Գրենք այս անհավասարությունները բացված տեսքով՝

$$-\sum_{j=1}^{n} s_{m+j}a_{ij}+s_{n+m+1}b_i\geq 0,\ i=1,2,...,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} s_i a_{ij}-s_{n+m+1}c_j\geq 0,\ \ j=1,2,...,n$$

$$-\sum_{i=1}^{m} s_i b_i+\sum_{j=1}^{n} s_{m+j}c_j\geq 0:$$

Ենթադրենք, որ $s_{n+m+1}>0$ և նշանակենք՝

$$x_j^0=\frac{s_{m+j}}{s_{n+m+1}},\ j=1,2,...,n;\qquad y_i^0=\frac{s_i}{s_{n+m+1}},\ i=1,2,...,m::$$

Այս նշանակումներով անհավասարությունները կընդունեն հետևյալ տեսքը՝

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^0\leq b_i,\ \ i=1,2,...,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^0\geq c_j,\quad j=1,2,...,n, \tag{6.3.16}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0 \ge \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^0 :$$

Կիրառելով 4.2.5 լեմը, այստեղից ստանում ենք, որ $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n\right)$-ն առաջին խնդրի լուծումն է, իսկ $y^0 = \left(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0\right)$-ն՝ երկրորդ խնդրի լուծումը:

Այժմ ենթադրենք, որ առաջին խաղացողի բոլոր օպտիմալ ստրատեգիաներում $s_{n+m+1} = 0$: Քանի որ H խաղը սիմետրիկ է, ուստի զրո է նաև երկրորդ խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիայի վերջին բաղադրիչը: Ըստ 6.3.2 թեորեմի, այստեղից հետևում է, որ առաջին խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիայի սկալյար արտադրյալը H-ի վերջին սյան հետ խիստ մեծ է 0-ից: Այսպիսով, (6.3.16) համակարգը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 \le 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^0 \ge 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.3.17}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0 > \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^0 :$$

Այս վերջին անհավասարության մեջ կամ $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0 > 0$, կամ $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i^0 < 0$: Դիցուք $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0 > 0$ և $x' = \left(x_1', x_2', \ldots, x_n'\right)$ կետը առաջին խնդրի թույլատրելի կետ է: Հեշտ է ստուգել, որ $x' + \alpha x^0$ վեկտորը թույլատրելի է ցանկացած $\alpha > 0$ թվի համար և α-ն մեծացնելով, առաջին խնդրի նպատակային ֆունկցիան կարելի է անվերջ մեծացնել, ուստի առաջին խնդիրը ոչ սահմանափակ է, ինչը հակասում է թեորեմի այն ենթադրությանը, որ երկրորդ խնդիրը թույլատրելի է: Նույն եղանակով, եթե $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i^0 < 0$, ապա կստանանք, որ երկրորդ խնդիրն է ոչ սահմանափակ:

6.4 ԱՆՎԵՐՋ ՀԱԿԱՄԱՐՏ ԽԱՂԵՐ

Դիտարկումը սկսենք հաշվելի խաղերից, այսինքն այնպիսի խաղերից, որտեղ X և Y բազմությունները հաշվելի բազմություններ են՝ $X=\{x_1,x_2,...,x_n,...\}$, $Y=\{y_1,y_2,...,y_n,...\}$: Խաղացողների խառն ստրատեգիաները սահմանվում են համանման վերջավոր խաղերին (հաշվելի խաղերում խաղացողների ստրատեգիաների բազմությունները նույնն են)՝ $p=(p_1,p_2,...,p_n,...)$; $p_i\geq 0,\ i=1,2,...$; $\sum_{i=1}^{\infty}p_i=1$: Առաջին խաղացողի շահույթի $H(p,q)$ մաթեմատիկական սպասումը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$H(p,q)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_ih_{ij}q_j=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}q_jh_{ij}p_i: \tag{6.4.1}$$

Այս սահմանումներից երևում է, որ կարող են առաջանալ տեխնիկական բարդույթներ, որոնք չկային վերջավոր դեպքում: Իրոք, (6.4.1) շարքերը կարող են ոչ միայն հավասար չլինեն, այլ նույնիսկ զուգամետ չլինել: Բացի այսպիսի տեխնիկական դժվարություններից, կարող են լինել նաև այնպիսի խաղեր, որոնք չունեն լուծում նույնիսկ խառն ստրատեգիաների դասում: Բերենք այդպիսի մի խաղի օրինակ՝ $G=\langle N,N,sign(i-j)\rangle$, որտեղ N-ը ամբողջ դրական թվերի բազմությունն է: Դիցուք $p=(p_1,p_2,...,p_n,...)$-ն առաջին խաղացողի որևէ ստրատեգիա է: Քանի որ $\sum_{i=1}^{\infty}p_i=1$, ապա ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի n_0, որ $\sum_{i=n_0}^{\infty}p_i<\varepsilon$: Հաշվենք խաղացողի շահույթը $H(p,n_0)$ իրավիճակում ֆիքսած $\varepsilon>0$ թվի դեպքում՝

$$H(p,n_0)=\sum_{i=1}^{n_0-1}p_i(-1)+\sum_{i=n_0}^{\infty}p_i:$$

Այստեղից առաջին խաղացողի ցանկացած $p=(p_1,p_2,...,p_n,...)$ ստրատեգիաի համար $\inf_{j\in N}H(p,j)=-1$, ուստի՝ $\sup_p\inf_{j\in N}H(p,j)=-1$:

Մյուս կողմից, ինչպիսին էլ լինի երկրորդ խաղացողի $q=(q_1,q_2,\dots,q_n,\dots)$ ստրատեգիան, ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի n_0, որ $\sum_{i=n_0}^{\infty} q_i<\varepsilon$ և, քանի որ

$$H(n_0,q)=\sum_{i=1}^{n_0-1} q_i(+1)+\sum_{i=n_0}^{\infty} q_i(-1),$$

ապա $\sup_i H(i,q)=1$ երկրորդ խաղացողի բոլոր ստրատեգիաների համար: Այստեղից՝ $\inf_q \sup_i H(i,q)=1$: Այսպիսով, $\inf_q \sup_i H(i,q)\neq \sup_p \inf_{j\in N} H(p,j)$, ուստի այս խաղում հավասարակշռության իրավիճակ գոյություն չունի: Այս օրինակը ցույց է տալիս, որ նույնիսկ ամենապարզ անվերջ խաղերում գոյության ընդհանուր թեորեմ չի կարող լինել: Սակայն խաղերի որոշ դասերի համար այդպիսի թեորեմներ ապացուցել հաջողվում է:

Դիտարկենք $G=\langle X,Y,H\rangle$ հակամարտ խաղերի ընդհանուր դեպքը, երբ X և Y բազմությունները կամայական բազմություններ են, իսկ $H(x,y)$-ը սահմանափակ իրականարժեք ֆունկցիա է, որոշված դեկարտյան $X\times Y$ արտադրյալի վրա:

Ստրատեգիաների X և Y բազմություններում կարելի է ներմուծել մետրիկա հետևյալ եղանակով: Ցանկացած $x',x''\in X$ կետերի համար սահմանենք՝

$$\rho(x',x'')=\sup_{y\in Y}\left|H(x',y)-H(x'',y)\right|:$$

Այս քվազիմետրիկան, որը հայտնի է որպես Հելլիի մետրիկա, հեշտությամբ կարելի վերածել մետրիկայի, դուրս գցելով X բազմությունից կրկնվող ստրատեգիաները: Տոպոլոգիան, որի հիմքը կազմում են այս մետրիկայով բաց բազմությունները, կոչվում է *բնական տոպոլոգիա*, իսկ մետրիկան՝ *բնական մետրիկա*:

Դժվար չէ ստուգել, որ բնական տոպոլոգիան կարելի է կառուցել նաև այլ ճանապարհով: Ցանկացած $x^0\in X$ կետի և $\varepsilon>0$ համար սահմանենք

$$B_X(x^0,\varepsilon)=\left\{x\in X:\sup_{y\in Y}\left|H(x^0,y)-H(x,y)\right|<\varepsilon\right\}$$

շրջակայքերի համակարգ: Այս շրջակայքերի համակարգով կազմված տոպոլոգիան նորից բնական տոպոլոգիան է: Նմանապես,

$$B_Y\left(y^0,\varepsilon\right)=\left\{y\in Y:\sup_{x\in X}\left|H\left(x,y^0\right)-H\left(x,y\right)\right|<\varepsilon\right\}$$

շրջակայքերի հիման վրա, կամ

$$\rho\left(y',y''\right)=\sup_{x\in X}\left|H\left(x,y'\right)-H\left(x,y''\right)\right|$$

մետրիկայի հիման վրա կառուցվում է Y բազմության բնական տոպոլոգիան:

Խաղացողների խառն ստրատեգիաներ սահմանելու համար, հարկավոր է X և Y բազմություններում ներմուծել չափելի համակարգեր: S_X-ով և S_Y-ով նշանակենք համապատասխանաբար X և Y բազմությունների ենթաբազմությունների σ-հանրահաշիվներ, որոնց վրա առայժմ սահմանափակումներ չենք դնում:

Սահմանում 6.4.1: $G=\langle X,Y,H\rangle$ խաղում առաջին խաղացողի խառն ստրատեգիա է կոչվում $\left(X,S_X\right)$ չափելի տարածության վրա որոշված հավանականային չափը: Երկրորդ խաղացողի խառն ստրատեգիա է կոչվում $\left(Y,S_Y\right)$ չափելի տարածության վրա որոշված հավանականային չափը: Խաղացողների խառն ստրատեգիաների բազմությունները նշանակենք համապատասխանաբար M_X–ով և M_Y-ով:

Հետագայում $H\left(x,y\right)$ ֆունկցիան ենթադրվում է սահմանափակ և չափելի $\left(X\times Y,S_X\times S_Y\right)$ չափելի տարածությունների արտադրյալի նկատմամբ: Ինչպես և վերջավոր դեպքում, առաջին խաղացողի շահույթը μ և ν խառն ստրատեգիաներ կիրառելիս սահմանվում է որպես շահույթի $H\left(\mu,\nu\right)$ մաթեմատիկական սպասում՝

$$H\left(\mu,\nu\right)=\int_{X\times Y}H\left(x,y\right)d\left(\mu\times\nu\right):$$

Նշանակենք՝

$$H\left(\mu,y\right)=\int_X H\left(x,y\right)d\mu,$$

$$H(x,\nu)=\int_Y H(x,y)d\nu:$$

Քանի որ $H(x,y)$ ֆունկցիան ենթադրվում է սահմանափակ և չափելի, ուստի, ըստ Ֆուբինիի թեորեմի (տես Հավելված)՝

$$H(\mu,\nu)=\int_X H(x,\nu)d\mu=\int_Y H(\mu,y)d\nu:$$

Ինչպես արդեն նշվել է, ի տարբերություն վերջավոր խաղերի, ընդհանուր դեպքում կարող է գոյություն չունենալ հավասարակշռության իրավիճակ, սակայն, որոշ դեպքերում, կարելի է ցանկացած չափով մոտենալ այդ իրավիճակներին: Այսպիսի դեպքերի համար սահմանենք հավասարակշռության փոքր ինչ թույլ տարբերակ:

Սահմանում 6.4.2: Տրված $\varepsilon>0$ թվի համար $\left(\mu^{\varepsilon},\nu^{\varepsilon}\right)$ իրավիճակը անվանում են ε-*հավասարակշռության իրավիճակ*, եթե բոլոր $\mu\in M_X$ և $\nu\in M_Y$ համար՝

$$H\left(\mu,\nu^{\varepsilon}\right)-\varepsilon<H\left(\mu^{\varepsilon},\nu^{\varepsilon}\right)<H\left(\mu^{\varepsilon},\nu\right)+\varepsilon: \qquad (6.4.1)$$

Հետևյալ պնդումը ապացուցվում է 6.2.2 թեորեմին համանման:

Թեորեմ 6.4.1: *Որպեսզի $G=\langle X,Y,H\rangle$ խաղում ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունենա ε-հավասարակշռության իրավիճակ, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի*

$$\sup_{\mu\in M_X}\inf_{\nu\in M_Y}H(\mu,\nu)=\inf_{\nu\in M_Y}\sup_{\mu\in M_X}H(\mu,\nu): \qquad (6.4.2)$$

Այս կրկնակի էքստրեմումների ընդհանուր արժեքն անվանում են G խաղի արժեք և նշանակում $V(G)$-ով:

Սահմանում 6.4.3: $G=\langle X,Y,H\rangle$ խաղն անվանում են *լիովին որոշյալ,* եթե $H(x,y)$ ֆունկցիան բավարարում է (6.4.2) պայմանին:

Բերենք մի սահմանում, որից հետագայում օգտվելու ենք:

Սահմանում 6.4.4: X տոպոլոգիական տարածությունը կոչվում է *նախակոմպակտ* տարածություն, եթե ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի վերջավոր ε–ցանց, այսինքն վերջավոր $X^{\varepsilon} = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq X$ ենթաբազմություն, որ $X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$:

Թեորեմ 6.4.1: *Եթե $G = \langle X, Y, H \rangle$ հակամարտ խաղում X և Y տարածությունները նախակոմպակտ են բնական տոպոլոգիայում, ապա խաղը լիովին որոշյալ է:*

Ապացույց: Ֆիքսենք որևէ $\varepsilon > 0$ և դիցուք $X^{\varepsilon} = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ և $Y^{\varepsilon} = \{y_1, y_2, ..., y_n\} \subseteq Y$ բազմությունները ε-ցանցեր են համապատասխանաբար X և Y տարածություններում: Դիտարկենք $G^{\varepsilon} = \langle X^{\varepsilon}, Y^{\varepsilon}, H^{\varepsilon} \rangle$ վերջավոր հակամարտ խաղ, որտեղ H^{ε}-ը H ֆունկցիաի սեղմումն է $X^{\varepsilon} \times Y^{\varepsilon}$ -ի վրա, այսինքն, $H^{\varepsilon}(x, y) = H(x, y)$ բոլոր $(x, y) \in X^{\varepsilon} \times Y^{\varepsilon}$ համար: Մատրիցային խաղերի հիմնական 6.3.1 թեորեմի համաձայն, $G^{\varepsilon} = \langle X^{\varepsilon}, Y^{\varepsilon}, H^{\varepsilon} \rangle$ խաղում գոյություն ունի $(p^{\varepsilon}, q^{\varepsilon})$, $p^{\varepsilon} = (p_1, p_2, ..., p_m)$, $q^{\varepsilon} = (q_1, q_2, ..., q_n)$ հավասարակշռության իրավիճակ՝

$$\sum_{j=1}^{n} H(x_i, y_j) q_j \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i H(x_i, y_j) q_j \leq \sum_{i=1}^{m} p_i H(x_i, y_j) \qquad (6.4.4)$$

բոլոր $x_i \in X^{\varepsilon}$ և $y_j \in Y^{\varepsilon}$ համար: X տարածության նախակոմպակտությունից հետևում է, որ ցանկացած $x \in X$ համար գոյություն ունի այնպիսի $x_i \in X^{\varepsilon}$, որ

$$\sup_{y \in Y} |H(x, y) - H(x_i, y)| < \varepsilon ,$$

ուստի՝

$$|H(x, y) - H(x_i, y)| < \varepsilon$$

բոլոր $y \in Y$ համար և, այդ թվում, բոլոր $y_j \in Y^{\varepsilon}$ համար՝

$$|H(x, y_j) - H(x_i, y_j)| < \varepsilon \ :$$

Այստեղից՝

$$H\left(x,y_j\right)-\varepsilon<H\left(x_i,y_j\right),\ j=1,2,...,n$$

Այս անհավասարություններից յուրաքանչյուրը բազմապատկելով երկրորդ խաղացողի $q^{\varepsilon}=\left(q_1,q_2,...,q_n\right)$ օպտիմալ ստրատեգիայի համապատասխան բաղադրիչով և գումարելով ստացված անհավասարությունները, կստանանք՝

$$\sum_{j=1}^{n}H\left(x,y_j\right)q_j-\sum_{j=1}^{n}\varepsilon q_j<\sum_{j=1}^{n}H\left(x_i,y_j\right)q_j\ :$$

Այսպիսով, ցանկացած $x\in X$ համար գոյություն ունի այնպիսի $x_i\in X^{\varepsilon}$, որ

$$\sum_{j=1}^{n}H\left(x,y_j\right)q_j-\varepsilon<\sum_{j=1}^{n}H\left(x_i,y_j\right)q_j\quad :$$

Մյուս կողմից, (6.4.4)-ից հետևում է, որ բոլոր $x_i\in X^{\varepsilon}$ համար

$$\sum_{j=1}^{n}H\left(x_i,y_j\right)q_j\le\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_iH\left(x_i,y_j\right)q_j\ ,$$

հետևաբար, բոլոր $x\in X$ համար՝

$$\sum_{j=1}^{n}H\left(x,y_j\right)q_j-\varepsilon<\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_iH\left(x_i,y_j\right)q_j\quad : \tag{6.4.5}$$

Համանման ձևով, օգտվելով Y տարածության նախակոմպակտությունից, կարելի է ցույց տալ, որ բոլոր $y\in Y$ համար՝

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_iH\left(x_i,y_j\right)q_j<\sum_{i=1}^{m}p_iH\left(x_i,y_j\right)+\varepsilon \tag{6.4.6}$$

Միացնելով (6.4.5) և (6.4.6) անհավասարությունները, կստանանք

$$\sum_{j=1}^{n}H\left(x,y_j\right)q_j-\varepsilon<\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_iH\left(x_i,y_j\right)q_j<\sum_{i=1}^{m}p_iH\left(x_i,y_j\right)+\varepsilon \tag{6.4.7}$$

բոլոր $x\in X$ և $y\in Y$ -ի համար:

Հակամարտ $G=\langle X,Y,H\rangle$ խաղում խաղացողների խառն ստրատեգիաները սահմանվում են որպես հավանական չափեր համապատասխանաբար (X,S_X) և (Y,S_Y) չափելի տարածությունների վրա: Կառուցենք դիսկրետ հավանականային չափեր μ^ε և ν^ε հետևյալ կերպ: Ցանկացած $A\subseteq X$, $A\in S_X$ և ցանկացած $B\subseteq Y$,$B\in S_Y$ համար

$$\mu^\varepsilon(A)=\sum_{i:x_i\in A}p_i;\ \nu^\varepsilon(B)=\sum_{j:x_j\in B}q_j:$$

Դժվար չէ ստուգել, որ կառուցված բազմության ֆունկցիաները իրոք հավանականային չափեր են և

$$H\left(\mu^\varepsilon,y\right)=\int_X H(x,y)\,d\mu^\varepsilon=\sum_{i=1}^m p_iH(x_i,y)\ ,$$

$$H\left(x,\nu^\varepsilon\right)=\int_Y H(x,y)\,d\nu^\varepsilon=\sum_{j=1}^n H\left(x,y_j\right)q_j\ ,$$

$$H\left(\mu^\varepsilon,\nu^\varepsilon\right)=\int_{X\times Y} H(x,y)\,d(\mu^\varepsilon\times\nu^\varepsilon)=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n p_iH\left(x_i,y_j\right)q_j:$$

Տեղադրելով այս արտահայտությունները (6.4.7) անհավասարությունների մեջ, կստանանք՝

$$H\left(\mu,\nu^\varepsilon\right)-\varepsilon<H\left(\mu^\varepsilon,\nu^\varepsilon\right)<H\left(\mu^\varepsilon,\nu\right)+\varepsilon$$

բոլոր $x\in X$ և $y\in Y$ համար, այսինքն $\left(\mu^\varepsilon,\nu^\varepsilon\right)$ իրավիճակը $\varepsilon-$հավասարակշռության իրավիճակ է $G=\langle X,Y,H\rangle$ խաղում:

Այժմ դիտարկենք հակամարտ խաղերի կարևոր մասնավոր դեպք, երբ X և Y բազմությունները իրական առանցքի հատվածներ են:

Սահմանում 6.4.4: $G=\langle[0,1],[0,1],H(x,y)\rangle$ հակամարտ խաղերը անվանում են *խաղեր միավոր քառակուսու վրա*:

Այս մասնավոր դեպքում, ինչպես ընդունված է հավանականությունների տեսությունում (տես Հավելված), չափելի բազմությունները կհնթադրվեն իրական առանցքի բորելյան բազմությունները, իսկ որպես խառն ստրատեգիաներ ընդունված է դիտարկել բաշխման ֆունկցիաներ:

Սահմանում 6.4.5: Միավոր քառակուսու վրա խաղերում առաջին խաղացողի խառն ստրատեգիան սահմանվում է որպես $F(x)$ ֆունկցիա, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

$$F(x') \leq F(x''), \text{ եթե } x' \leq x'' ,$$

$$F(0)=0, F(1)=1,$$

$$F(x)=F(x+0), x \neq 0:$$

Երկրորդ խաղացողի խառն ստրատեգիան սահմանվում է համանմանորեն: Խաղացողի շահույթի մաթեմատիկական սպասումը խառն ստրատեգիաների օգտագործման պայմաններում սահմանվում է (ինչպես և ընդունված է հավանականությունների տեսությունում) որպես Ստիլտեսի ինտեգրալներ (եթե գոյություն ունեն)՝

$$H(F,y)=\int_0^1 H(x,y)\,dF(x),$$

$$H(x,G)=\int_0^1 H(x,y)\,dG(y),$$

$$H(F,G)=\int_0^1\int_0^1 H(x,y)\,dF(x)dG(y)=\int_0^1\int_0^1 H(x,y)\,dG(y)\,dF(x):$$

Սահմանում 6.4.6: $G=\langle[0,1],[0,1],H(x,y)\rangle$ հակամարտ խաղն անվանում են *անընդհատ խաղ,* եթե $H(x,y)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[0,1]\times[0,1]$ քառակուսու վրա:

Լեմ 6.4.1: *Անընդհատ խաղերը նախակոմպակտ են բնական մետրիկայում:*

<u>Ապացույց:</u> Քանի որ $H(x,y)$ ֆունկցիան ենթադրվել է անընդհատ փակ սահմանափակ բազմության վրա, ապա այն հավասարաչափ անընդհատ է: Սա նշանակում է, որ ցանկացած $\varepsilon > \varepsilon_1 > 0$ թվերի համար գոյություն ունի այնպիսի $\delta > 0$ թիվ, որ երբ $|x' - x''| < \delta$, ապա բոլոր $y \in [0,1]$ համար՝

$$|H(x',y) - H(x'',y)| < \varepsilon_1,$$

ուստի,

$$\sup_{y\in[0,1]} |H(x',y) - H(x'',y)| \le \varepsilon_1 < \varepsilon :$$

Ակներև է, որ միավոր հատվածը նախակոմպակտ է Էվկլիդեսյան մետրիկայում: Այսպիսով, ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $\delta > 0$ թիվ, որ δ-ցանցը Էվկլիդեսյան մետրիկայում հանդիսանում է ε-ցանց բնական մետրիկայում:

Թեորեմ 6.4.2: *Անընդհատ խաղերում գոյություն ունի հավասարակշռության իրավիճակ:*

<u>Ապացույց:</u> Նախորդ լեմից հետևում է, որ անընդհատ խաղերը նախակոմպակտ են, հետևաբար, ըստ 6.4.1 թեորեմի, լիովին որոշյալ են: Ուստի, ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $(F^{\varepsilon}, G^{\varepsilon})$ ε-հավասարակշռության իրավիճակ: Վերցնենք $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > ... > \varepsilon_n > ...$ թվերի նվազող զրոին զուգամիտող հաջորդականություն: Յուրաքանչյուր ε_n-ի համար գոյություն ունի ε_n-հավասարակշռության իրավիճակ

$$\int_0^1 H(x,y)\,dG^{\varepsilon_n} - \varepsilon < \int_0^1\int_0^1 H(x,y)\,dG^{\varepsilon_n}dF^{\varepsilon_n} < \int_0^1 H(x,y)\,dF^{\varepsilon_n} + \varepsilon \tag{6.4.8}$$

Այսպիսով, ստանում ենք բախշման ֆունկցիաների երկու հաջորդականություն՝ $\{F^{\varepsilon_n}\}$ և $\{G^{\varepsilon_n}\}$: Ըստ Հելլիի առաջին թեորեմի (տես Հավելված), այս հաջորդականություններից կարելի է ընտրել գրեթե ամենուրեք զուգամիտող ենթահաջորդականություններ: Առանց ընդհնրությունը խախտելու կարելի է ենթադրել, որ $\{F^{\varepsilon_n}\}$ և $\{G^{\varepsilon_n}\}$ հաջորդականություններն են զուգամիտող: Այս հաջորդականությունների սահմանային բաշխման ֆունկցիաները նշանակենք համապատասխանաբար $F^0(x)$-ով և $G^0(y)$-ով: Դիտարկենք հետևյալ ինտեգրալները՝

$$\int_0^1 H(x,y)dF^{\varepsilon_n}\ , \qquad \int_0^1 H(x,y)dG^{\varepsilon_n}:$$

Քանի որ H ֆունկցիան անընդհատ է ըստ երկու փոփոխականի, իսկ $\{F^{\varepsilon_n}\}$ և $\{G^{\varepsilon_n}\}$ հաջորդականությունները համարյա ամենուրեք զուգամիտում են $F^0(x)$ և $G^0(y)$ ֆունկցիաներին, ուստի, ըստ Հելլիի երկրորդ թեորեմի

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 H(x,y)dF^{\varepsilon_n} = \int_0^1 H(x,y)dF^0$$

բոլոր ֆիքսած $y\in[0,1]$ համար, և

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 H(x,y)dG^{\varepsilon_n} = \int_0^1 H(x,y)dG^0$$

բոլոր ֆիքսած $x\in[0,1]$ համար: Այնուհետև, քանի որ $\int_0^1 H(x,y)dG^0$ ինտեգրալը անընդհատ է ըստ x-ի, ապա, երկու անգամ կիրառելով Հելլիի երկրորդ թեորեմը, կստանանք՝

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\int_0^1 H(x,y)dG^{\varepsilon_n}dF^{\varepsilon_n} = \int_0^1\int_0^1 H(x,y)dG^0dF^0:$$

Այժմ, անցնելով սահմանի (6.4.8) անհավասարություններում և հաշվի առնելով, որ $\varepsilon_n \to 0$, վերջնականապես կստանանք՝

$$\int_0^1 H(x,y)dG^0 \le \int_0^1\int_0^1 H(x,y)dG^0dF^0 \le \int_0^1 H(x,y)dF^0$$

բոլոր $x\in[0,1]$ և $y\in[0,1]$ համար: Սա էլ նշանակում է, որ (F^0,G^0) զույգը հավասարակշռության իրավիճակ է անընդհատ խաղում:

Հետևյալ թեորեմները թույլ են տալիս որոշ մասնավոր դեպքերում գտնել նաև խաղացողների մաքուր օպտիմալ ստրատեգիաները:

Թեորեմ 6.4.3: *Եթե $G=\langle[0,1],[0,1],H(x,y)\rangle$ անընդհատ խաղում շահույթի ֆունկցիան գոգավոր է ըստ առաջին փոփոխականի՝ ցանկացած ֆիքսած $y\in[0,1]$ -ի համար, ապա առաջին խաղացողն ունի մաքուր օպտիմալ ստրատեգիա:*

Ապացույց: Քանի որ $H(x,y)$ ֆունկցիան անընդհատ է, ուստի առաջին խաղացողն ունի օպտիմալ, ընդհանուր դեպքում, խառն ստրատեգիա: Դիցուք այն $F^0(x)$-ն է և $x^0=\int_0^1 xdF^0(x)$: Ակնհայտ է, որ $x^0\in[0,1]$ և կարող է դիտարկվել որպես առաջին խաղացողի մաքուր ստրատեգիա: Տրոհենք $[0,1]$ հատվածը $n+1$ հավասար մասերի՝ $0=x_0<x_1<x_2...<x_n=1$ և նշանակենք՝ $\lambda_i=\left(F^0(x_{i+1})-F^0(x_i)\right)$: Բաշխման ֆունկցիայի սահմանումից հետևում է, որ $\lambda_i\geq 0,\ i=0,1,...,n$ և $\sum_{i=0}^{n}\lambda_i=F(1)-F(0)=1$: $H(x,y)$ ֆունկցիան ենթադրվել է գոգավոր ըստ x-ի, հետևաբար, ցանկացած ֆիքսած $y\in[0,1]$ -ի համար՝

$$H\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda_i x_i,y\right)\geq\sum_{i=0}^{n}\lambda_i H(x_i,y):$$

Սթիլթիեսի ինտեգրալի սահմանումից՝

$$x^0=\int_0^1 xdF^0(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}x_i\left(F^0(x_{i+1})-F^0(x_i)\right),$$

$$\int_0^1 H(x,y)dF^0(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}H(x_i,y)\left(F^0(x_{i+1})-F^0(x_i)\right):$$

Հաշվի առնելով, որ $H(x,y)$ ֆունկցիան անընդհատ է, այստեղից կստանանք՝

$$H\left(\int_0^1 xdF^0(x),y\right)\geq\int_0^1 H(x,y)dF^0(x):$$

Այսինքն, $H\left(x^0, y\right) \geq H\left(F^0, y\right)$ բոլոր $y \in [0,1]$ համար: Սա նշանակում է, որ x^0 մաքուր ստրատեգիան օպտիմալ է առաջին խաղացողի համար:

Նույն եղանակով ապացուցվում են նաև հետևյալ թեորեմները:

Թեորեմ 6.4.4: *Եթե $G = \langle [0,1],[0,1], H(x,y) \rangle$ անընդհատ խաղում շահույթի ֆունկցիան ուռուցիկ է ըստ երկրորդ փոփոխականի՝ ցանկացած ֆիքսած $x \in [0,1]$ կետի համար, ապա երկրորդ խաղացողն ունի մաքուր օպտիմալ ստրատեգիա:*

Թեորեմ 6.4.5: *Եթե $G = \langle [0,1],[0,1], H(x,y) \rangle$ անընդհատ խաղում շահույթի ֆունկցիան գոգավոր է ըստ առաջին փոփոխականի՝ ցանկացած ֆիքսած $y \in [0,1]$ կետի համար և ուռուցիկ է ըստ երկրորդ փոփոխականի՝ ցանկացած ֆիքսած $x \in [0,1]$ կետի համար, ապա խաղում գոյություն ունի հավասարակշռության իրավիճակ մաքուր ստրատեգիաներում:*

Օրինակ 6.4.1: Դիտարկենք հետևյալ խաղը՝ $G = \left\langle [0,1],[0,1],(x-y)^2 \right\rangle$: Այս խաղում $(x-y)^2$ ֆունկցիան ըստ երկու փոփոխականների էլ ուռուցիկ է, ուստի, համաձայն 6.4.4 թեորեմի, երկրորդ խաղացողն ունի մաքուր օպտիմալ ստրատեգիա: Այստեղից,

$$V(G) = \min_{y \in [0,1]} \max_{x \in [0,1]} (x-y)^2 :$$

Հեշտ է տեսնել, որ

$$\max_{x \in [0,1]} (x-y)^2 = \begin{cases} (1-y)^2, y \leq 1/2, \\ y^2, y \geq 1/2 \end{cases} :$$

Հետևաբար, $V(G) = \min_{y \in [0,1]} \max_{x \in [0,1]} (x-y)^2 = 1/4$ և երկրորդ խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիան $y^0 = 1/2$ է: Առաջին խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիան գտնելու համար կարելի է օգտվել այն փաստից, որ օպտիմալ ստրատեգիայի սպեկտրի կետերը պետք է բավարարեն հետևյալ հավասարմանը (այս հատկությունը ձևակերպվել էր վերջավոր խաղերի համար, սակայն տեղի ունի նաև անընդհատ խաղերում)՝

$$H\left(x,y^0\right)=\left(x-1/2\right)^2=1/4=V\left(G\right):$$

Այստեղից ստանում ենք երկու կետ՝ $x'=0,\ x''=1$: Դժվար չէ ստուգել, որ առաջին խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիան հետևյալ F^0 բաշխման ֆունկցիան է՝

$$F^0\left(x\right)=\begin{cases}0,\ x\le 0\\ 1/2,\ 0<x<1:\\ 1,\ x\ge 1\end{cases}$$

Դիտարկենք նաև խզվող շահույթի ֆունկցիաներով խաղերի մի դաս: Խաղեր միավոր քառակուսու վրա, որտեղ շահույթի ֆունկցիան ունի խզում քառակուսու անկյունագծի վրա և անընդհատ է անկյունագծից դուրս, հանդիպում են այն դեպքերում, երբ խաղացողի ստրատեգիան ժամանակի պահի ընտրությունն է և շատ էական է, թե որ խաղացողը կկատարի առաջին ընտրությունը: Դժվար չէ ստուգել, որ այս խաղերը նախակոմպակտ չեն և Վալդի թեորեմը կիրառելի չէ, սակայն այս խաղերը նույնպես ունեն լուծում:

Թեորեմ 6.4.6: *Եթե* $G=\left\langle[0,1],[0,1],H\right\rangle$ *խաղում շահույթի ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝*

$$H\left(x,y\right)=\begin{cases}L\left(x,y\right),\ x<y,\\ \varphi\left(x\right),\ x=y,\\ M\left(x,y\right),\ x>y,\end{cases}$$

ընդ որում $L\left(x,y\right)$ *և* $M\left(x,y\right)$ *ֆունկցիաները անընդհատ են իրենց որոշման եռանկյունիների փակման վրա և ցանկացած* $x\in[0,1]$ *համար* $\varphi\left(x\right)$ *ֆունկցիայի արժեքը ընկած է* $L\left(x,x\right)$ *և* $M\left(x,x\right)$ *արժեքների միջև՝*

$$\min\left\{L\left(x,x\right),M\left(x,x\right)\right\}\le\varphi\left(x\right)\le\max\left\{L\left(x,x\right),M\left(x,x\right)\right\},$$

ապա G *խաղում գոյություն ունի հավասարակշռության իրավիճակ:*

Ապացույց: Նախ ցույց տանք, որ G խաղը լիովին որոշված է: Վերցնենք $\varepsilon>0$ կամայական դրական թիվ: Քանի որ $L\left(x,y\right)$ և $M\left(x,y\right)$ ֆունկցիաները հավասարաչափ անընդհատ են, ապա գոյություն ունի այնպիսի $\delta > 0$, որ երբ $|x' - x''| < \delta$, ապա բոլոր $y \in [0,1]$ կետերի համար տեղի ունի՝

$$\begin{aligned} &\left| L(x', y) - L(x'', y) \right| < \varepsilon, \\ &\left| M(x', y) - M(x'', y) \right| < \varepsilon \end{aligned} , \tag{6.4.9}$$

և երբ $|y' - y''| < \delta$, ապա բոլոր $x \in [0,1]$ կետերի համար տեղի ունի՝

$$\begin{aligned} &\left| L(x, y') - L(x, y'') \right| < \varepsilon, \\ &\left| M(x, y') - M(x, y'') \right| < \varepsilon \end{aligned} : \tag{6.4.10}$$

Կամայականորեն ընտրենք՝

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$$

կետեր այնպես, որ $x_{i+1} - x_i < \delta$ բոլոր $i = 0,1,\ldots,n-1$ համար և վերցնենք $y_i = x_i$, $i = 0,1,\ldots,n-1$: Նշանակենք՝ $X^{\varepsilon} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, Y^{\varepsilon} = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ և դիտարկենք $G^{\varepsilon} = \langle X^{\varepsilon}, Y^{\varepsilon}, H \rangle$ վերջավոր հակամարտ խաղը: Խաղացողների օպտիմալ ստրատեգիաները G^{ε} խաղում նշանակենք համապատասխանաբար $p^{\varepsilon} = (p_0, p_1, \ldots, p_n)$ և $q^{\varepsilon} = (q_0, q_1, \ldots, q_n)$: Այսպիսով, բոլոր $x_i \in X^{\varepsilon}, y_j \in Y^{\varepsilon}$ համար

$$H(x_i, p^{\varepsilon}) \le H(p^{\varepsilon}, q^{\varepsilon}) \le H(p^{\varepsilon}, y_j): \tag{6.4.11}$$

Նկատենք, որ

$$H(p^{\varepsilon}, y_j) = \sum_{i<j} x_i L(x_i, y_j) + x_j \varphi(x_j) + \sum_{i>j} x_i M(x_i, y_j): \tag{6.4.12}$$

Վերցնենք կամայական $y \in [0,1]$: Ենթադրենք, որ $y \notin Y^{\varepsilon}, y \in (y_j, y_{j+1})$: Ունենք՝

$$H(p^{\varepsilon}, y) = \sum_{i \le j} x_i L(x_i, y) + \sum_{i>j} x_i M(x_i, y): \tag{6.4.13}$$

Ենթադրենք, որ

$$\varphi\left(x_j\right) \le L\left(x_j, x_j\right): \tag{6.4.14}$$

Հանելով (6.4.13) անհավասարությունը (6.4.12)-ից, կստանանք՝

$$H\left(p^{\varepsilon}, y_j\right) - H\left(p^{\varepsilon}, y\right) = \sum_{i<j} p_i L\left(x_i, y_j\right) - \sum_{i<j} p_i L\left(x_i, y\right) - p_j L\left(x_j, y\right) + p_j \varphi\left(x_j\right) +$$
$$+\sum_{i>j} p_i M\left(x_i, y_j\right) - \sum_{i>j} p_i M\left(x_i, y\right) = \sum_{i<j} p_i (L\left(x_i, y_j\right) - L\left(x_i, y\right)) + p_j (\varphi\left(x_j\right) - L\left(x_j, y_j\right)) +$$
$$+ p_i (L\left(x_j, y_j\right) - L\left(x_j, y\right)) + \sum_{i>j} p_i (M\left(x_i, y_j\right) - M\left(x_i, y\right)):$$

Օգտվելով (6.4.10) անհավասարություններից, կստանանք՝

$$H\left(p^{\varepsilon}, y_j\right) - H\left(p^{\varepsilon}, y\right) \le \sum_{i<j} p_i \varepsilon + p_j \varepsilon + p_j (\varphi\left(x_j\right) - L\left(x_j, y_j\right)) + \sum_{i>j} p_i \varepsilon$$

և, հաշվի առնելով, որ $\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$ և (6.4.14) պայմանը, վերջնականապես կստանանք, որ բոլոր $y \in \left[y_j, y_{j+1}\right]$; $j = 0, 1, \ldots, n-1$ համար՝

$$H\left(p^{\varepsilon}, y\right) + \varepsilon \ge H\left(p^{\varepsilon}, y_j\right): \tag{6.4.15}$$

Այժմ ենթադրենք, որ

$$\varphi\left(x_{j+1}\right) \le M\left(x_{j+1}, x_{j+1}\right):$$

Այս դեպքում՝

$$H\left(p^{\varepsilon}, y_{j+1}\right) - H\left(p^{\varepsilon}, y\right) = \sum_{i<j+1} p_i (L\left(x_i, y_{j+1}\right) - L\left(x_i, y\right)) + p_{j+1} (\varphi\left(x_{j+1}\right) - L\left(x_{j+1}, y_{j+1}\right)) +$$
$$+ p_{j+1} (L\left(x_{j+1}, y_{j+1}\right) - L\left(x_{j+1}, y\right)) + \sum_{i>j+1} p_i (M\left(x_i, y_{j+1}\right) - M\left(x_i, y\right)):$$

և, ինչպես և վերևում,

$$H\left(p^{\varepsilon}, y\right) + \varepsilon \ge H\left(p^{\varepsilon}, y_{j+1}\right)$$

բոլոր $y\in\left[y_j,y_{j+1}\right]$; $j=0,1,\ldots,n-1$ համար: Այսպիսով,

$$\varphi(x_i)\le\max\left\{L(x_i,x_i),M(x_i,x_i)\right\},\ i=0,1,\ldots,n$$

դեպքում ցանկացած $y\in[0,1]$ համար գոյություն ունի $y_j\in Y^{\varepsilon}$, այնպես, որ՝

$$H\left(p^{\varepsilon},y_j\right)\le H\left(p^{\varepsilon},y\right)+\varepsilon:$$

Այս անհավասարությունը միացնելով (6.4.11) անհավասարության հետ ստանում ենք, որ բոլոր $y\in[0,1]$ համար՝

$$H\left(p^{\varepsilon},q^{\varepsilon}\right)\le H\left(p^{\varepsilon},y\right)+\varepsilon: \qquad (6.4.16)$$

Նման դատողություններով կարելի է ցույց տալ, որ

$$\varphi(x_i)\ge\min\left\{L(x_i,x_i),M(x_i,x_i)\right\},\ i=0,1,\ldots,n$$

դեպքում ցանկացած $x\in[0,1]$ համար՝

$$H\left(x,q^{\varepsilon}\right)-\varepsilon\le H\left(p^{\varepsilon},q^{\varepsilon}\right):$$

Միացնելով այս անհավասարությունը (6.4.16) անհավասարությանը, կստանանք, որ բոլոր $x\in[0,1]$, $y\in[0,1]$ համար՝

$$H\left(x,q^{\varepsilon}\right)-\varepsilon\le H\left(p^{\varepsilon},q^{\varepsilon}\right)\le H\left(p^{\varepsilon},y\right):$$

Նշանակենք $F^{\varepsilon}(x)$-ով և $G^{\varepsilon}(y)$-ով աստիճանային բաշխման ֆունկցիաները, որոնք համապատասխանաբար ունեն p_i թռիչքներ x_i, $i=0,1,\ldots,n$ կետերում, և q_j թռիչքներ y_j, $j=0,1,\ldots,n$ կետերում: Հաշվի առնելով, որ՝

$$H\left(p^{\varepsilon},y\right)=\sum_{i=0}^{n}p_iH(x_i,y)=\int_0^1 H(x,y)\,dF^{\varepsilon}(x)=H\left(F^{\varepsilon}(x),y\right),$$

$$H\left(x,q^{\varepsilon}\right)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}H\left(x,y_j\right)q_j=\int_0^1 H\left(x,y\right)dG^{\varepsilon}\left(y\right)=H\left(x,G^{\varepsilon}\left(y\right)\right),$$

$$H\left(p^{\varepsilon},q^{\varepsilon}\right)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}p_iH\left(x_i,y_j\right)q_j=\int_0^1\int_0^1 H\left(x,y\right)dF^{\varepsilon}\left(x\right)dG^{\varepsilon}\left(y\right)=H\left(F^{\varepsilon}\left(x\right),G^{\varepsilon}\left(y\right)\right),$$

(6.4.17) անհավասարությունը կստանա հետևյալ տեսքը`

$$H\left(x,G^{\varepsilon}\left(y\right)\right)-\varepsilon\le H\left(F^{\varepsilon}\left(x\right),G^{\varepsilon}\left(y\right)\right)\le H\left(F^{\varepsilon}\left(x\right),y\right):$$

Սա էլ նշանակում է, որ $\left(F^{\varepsilon}\left(x\right),G^{\varepsilon}\left(y\right)\right)$ իրավիճակը ε-հավասարակշռության իրավիճակ է G խաղում: Հավասարակշռության իրավիճակի գոյությունը ապացուցվում է այնպես, ինչպես 6.4.2 թեորեմում, օգտվելով Հելլիի թեորեմներից:

6.5 ԿՈՈՊԵՐԱՏԻՎ ԽԱՂԵՐ

Սույն բաժնի սկզբում (կետ 6.1) սահմանել ենք n խաղացողի խաղ նորմալ տեսքով որպես $G=\left\langle I,\{S_i\}_{i\in I},\{H_i\}_{i\in I}\right\rangle$ համակարգ, որտեղ՝ $I=\{1,2,...,n\}$-ն խաղացողների բազմությունն է, S_i բազմությունները խաղացողների ստրատեգիաների բազմություններ են, իսկ $H_i(s_1,s_2,...,s_n)$ ֆունկցիաները խաղացողների շահույթի ֆունկցիաներն են: Սակայն այնտեղ դիտարկվում էր խաղի անդաշինք տարբերակը, այսինքն այն տարբերակը, երբ խաղացողները իրավունք չունեն պայմանավորվելու միմիանց հետ և կազմել դաշինքներ կամ կոալիցիաներ: Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ խաղացողները կարող են միավորվել: Դիցուք խաղացողների մի խումբ միավորվել է և ստեղծել $T\subseteq I$ կոալիցիա: Այդ դեպքում T կոալիցիայի մաքսիմալ ապահոված շահույթը՝ $v(T)$-ն կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով (տես կետ 6.2)՝

$$v(T)=\max_{s_i:i\in T}\min_{s_i:i\in I\setminus T}\sum_{i\in I}H_i(s_1,s_2,...,s_n):$$

Ենթադրենք նաև, որ կոալիցիայի ընդհանուր շահույթը կարող է կամայականորեն բաշխվել կոալիցիայի անդամների միջև: Այսպիսի խաղերն անվանում են *խաղեր կողմնակի վճարումներով:* Այսուհետ դիտարկվելու են միայն այսպիսի խաղեր: Այս խաղերում խաղացողի ստրատեգիայի ընտրությունը թելադրվում է կոալիցիայի կողմից, որին նա անդամակցում է: Այսպիսով, խաղացողի և՛ գործողությունները, և՛ շահույթը կախված են միայն կոալիցիաների շահույթներից: Հետևաբար կարելի է վերանալ խաղի սկզբնական ստրատեգիական բնույթից և դիտարկել միայն $v(T)$ ֆունկցիան:

Սահմանում 6.5.1: I բազմության բոլոր ենթաբազմությունների բազմության վրա որոշված $v(T)$ իրականարժեք ֆունկցիան անվանում են *բնութագրիչ ֆունկցիա,* եթե այն բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

$$\begin{aligned}&1.\quad v(\varnothing)=0,\\&2.\quad v(S\cup T)\geq v(S)+v(T), T\cap S=\varnothing:\end{aligned}\tag{6.5.1}$$

Այստեղ երկրորդ պայմանը բնական է և նշանակում է, որ միավորվելով խաղացողները կարող են միայն շահել:

Սահմանում 6.5.2: *Կոոպերատիվ n խաղացողի խաղ* անվանում են $\langle I, v(T)\rangle$ զույգը, որտեղ $I = \{1, 2, ..., n\}$ բազմությունը խաղացողների բազմությունն է, իսկ $v(T)$-ն (6.5.1) սահմանմանը բավարարող բնութագրիչ ֆունկցիա:

Ակնհայտ է, որ ամենամեծ $v(I)$ ընդհանուր շահույթը խաղացողները կստանան, եթե բոլորը միավորվեն: Այս դեպքում հիմնական հարցը ընդհանուր շահույթը խաղացողների միջև արդարացի բաժանելն է:

Սահմանում 6.5.3: Կոոպերատիվ $\langle I, v(T)\rangle$ խաղում $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ վեկտորն անվանում են *բաժանք,* եթե այն բավարարում է հետևյալ երկու պայմաններին՝

1. $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(I)$,
2. $x_i \geq v(\{i\}), i \in I$:

Խաղում բոլոր բաժանքների բազմությունը նշանակենք $X(v)$-ով: Բաժանքի սահմանումից հետևում է, որ ընդհանուր շահույթը ամբողջությամբ է բաժանվում խաղացողների միջև և յուրաքանչյուրը ստանում է ոչ պակաս, քան եթե խաղա միայնակ:

Սահմանում 6.5.4: $\langle I, v(T)\rangle$ խաղն անվանում են *էական խաղ*, եթե $\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) < v(I)$:

Ակներև է, որ հետաքրքրություն ներկայացնում են միայն էական խաղերը, քանի որ ոչ էական խաղերում գոյություն ունի միայն մեկ բաժանք՝ $x_i = v(\{i\}), i \in I$:

Կոոպերատիվ խաղերի հիմնական խնդիրը լավագույն բաժանքներ գտնելն է: Լավագույն բաժանքները գտնելու համար նախ սահմանենք բաժանքների գերադասելիության հարաբերությունը: Դիցուք խաղում x-ը և y-ը երկու տարբեր բաժանքներ են: Քանի որ այս երկու վեկտորների բաղադրիչների գումարները հավասար են, ապա x բաժանքը ձեռնտու կլինի խաղացողների մի մասին, y բաժանքը՝ մեկ այլ մասին: Սակայն, որպեսզի խաղացողները պնդեն, որ ընդունվի այս կամ այն բաժանքը, պետք է ունենան այդ իրավունքը: Սա հանգեցնում է հետևյալ սահմանման:

Սահմանում 6.5.5: Ասում են, որ $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ բաժանքը գերադասելի է $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ բաժանքից ըստ $S\subseteq I$ կոալիցիայի, և նշանակում են $x\underset{S}{\succ}y$, եթե

1. $x_i > y_i, i\in S,$
2. $\sum_{i\in S} x_i \le v(S)$:

Եվ կասենք, որ x բաժանքը գերադասելի է y բաժանքից՝ $x\succ y$, եթե գոյություն ունի $S\subseteq I$ կոալիցիա, ըստ որի $x\underset{S}{\succ}y$:

Բաժանքների գերադասելիության սահմանումից երևում է, որ սա բավականին "վատ" հարաբերություն է՝ օրինակ այն կարող է տրանզիտիվ չլինել: Ուստի կոպերատիվ խաղերում օպտիմալության սկզբունք սահմանելը կարևորագույն խնդիրներից է: Հայտնի են օպտիմալության սկզբունքների բազմաթիվ սահմանումներ, որոնք կիրառվում են տարբեր ոլորտներում: Այստեղ կդիտարկվեն այդ սկզբունքներից մի քանիսը:

Սահմանում 6.5.6: Բաժանքների $V\subseteq I$ բազմությունը կոչվում է N-M- *լուծում*, կամ պարզապես լուծում, եթե V բազմության ոչ մի բաժանք գերադասելի չէ մյուսից և ցանկացած $y\notin V$ բաժանքի համար գոյություն ունի այնպիսի $x\in V$ բաժանք, որ $x\succ y$:

Սահմանում 6.5.7: Չգերադասվող բաժանքների բազմությունը կոչվում է *խաղի միջուկ* և նշանակվում է $C(v)$-ով:

Դիտարկենք խաղի լուծման և միջուկի որոշ հատկություններ: Հայտնի են խաղեր, որտեղ լուծումները բազմաթիվ են, սակայն կառուցված են նաև խաղեր, որտեղ լուծում գոյություն չունի: Ի տարբերություն լուծման, միջուկը, եթե դատարկ չէ, ապա միակն է խաղում և ընկած է լուծման մեջ: Խաղի մի լուծում չի կարող ընկած լինել մեկ այլ լուծման մեջ: Իրոք, դիցուք խաղում գոյություն ունեն երկու՝ V', V'' լուծումներ, ընդ որում $V'\subset V''$: Եթե $y\in V''\setminus V'$, ապա, քանի որ V'-ը լուծում է, գոյություն ունի այնպիսի $x\in V'$, որ $x\succ y$: Դա հակասում է այն պայմանին, որ V''-ը լուծում է: Այստեղից և այն փաստից, որ միջուկը ընկած է լուծման մեջ, հետևում է, որ եթե միջուկը համընկնում է լուծման հետ, ապա լուծումը միակն է: Հետևյալ թեորեմը բնորոշում է միջուկի կառուցվածքը:

Թեորեմ 6.5.1: *$\langle I,v\rangle$ խաղի $C(v)$ միջուկը համընկնում է*

$$E=\left\{x\in X:\sum_{i\in S}x_i\geq v(S),S\subseteq I\right\}$$

բազմության հետ:

<u>Ապացույց:</u> Դիցուք $x\in E$: Եթե $x\notin C(v)$, ապա պետք է գոյություն ունենա $y\in X$, $y\succ x$ բաժանք: Դիցուք $y\underset{S}{\succ}x$, այսինքն

$$y_i>x_i,i\in S,$$

$$\sum_{i\in S}y_i\leq v(S):$$

Սակայն $\sum_{i\in S}x_i<\sum_{i\in S}y_i\leq v(S)$: Սա հակասում է նրան, որ $x\in E$:

Մյուս կողմից, դիցուք $x\in C(v)$, սակայն որևէ $S\subseteq I$ կոալիցիաի համար $\sum_{i\in S}x_i<v(S)$: Կառուցենք բաժանք հետևյալ եղանակով: Նշանակենք

$$\lambda=v(S)-\sum_{i\in S}x_i$$

և սահմանենք՝

$$y_i=\begin{cases}x_i+\lambda/|S|,i\in S\\ v(\{i\})+\dfrac{v(I)-v(S)-\sum_{i\in I\setminus S}v(\{i\})}{|I\setminus S|}, & i\in I\setminus S\end{cases}:$$

Հեշտ է ստուգել, որ $y=(y_1,y_2,...,y_n)$-ը բաժանք է և $y\underset{S}{\succ}x$: Սա հակասում է այն ենթադրությանը, որ $x\in C(v)$: Այսպիսով, $C(v)=E$:

Սահմանում 6.5.8: Երկու՝ $\langle I,v\rangle$ և $\langle I,w\rangle$ խաղերն անվանում են *ստրատեգիապես համարժեք,* կամ պարզապես *համարժեք,* եթե գոյություն ունեն այնպիսի $a>0$ և $b_i, i\in I$ իրական թվեր, որ բոլոր $S\subseteq I$ համար՝

$$v(S)=aw(S)+\sum_{i\in S}b_i :$$

Դիցուք $\langle I,v\rangle$ և $\langle I,w\rangle$ խաղերը համարժեք են, $X(v)$-ն բաժանքների բազմությունն է $\langle I,v\rangle$ խաղում, իսկ $Y(w)$-ն բաժանքների բազմությունն է $\langle I,w\rangle$ խաղում: Ակներև է, որ $y(x)=ax+b$ արտապատկերումը փոխմիարժեք համապատասխանություն է հաստատում $X(v)$ և $Y(w)$ բազմությունների միջև, ընդ որում $x'\succ x''$ առնչությունից հետևում է, որ $y(x')\succ y(x'')$:

Քանի որ ստրատեգիական համարժեքությունը համարժեքության հարաբերություն է խաղերի բազմության վրա, ապա հետաքրքիր է ընտրել յուրաքանչյուր համարժեքության դասից մի կոնկրետ խաղ:

Սահմանում 6.5.9: $\langle I,v\rangle$ խաղն անվանում են $(0,1)$ տեսքի խաղ, եթե

1. $v(\{i\})=0, i\in I,$
2. $v(I)=1$:

Այս սահմանումներից անմիջականորեն հետևում է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 6.5.2: *Ցանկացած էական խաղ ստրատեգիապես համարժեք է մեկ և միայն մեկ* $(0,1)$ *տեսքի խաղի:*

Այժմ դիտարկենք կոոպերատիվ խաղերի մի կարևոր դաս:

Սահմանում 6.5.10: $\langle I,v\rangle$ խաղն անվանում են *ուռուցիկ խաղ,* եթե բոլոր $S,T\subset I$ կոալիցիաների համար՝

$$v(S)+v(T)\le v(S\cup T)+v(S\cap T):$$

Թեորեմ 6.5.3: $\langle I,v\rangle$ *խաղն ուռուցիկ է այն, և միայն այն դեպքում, երբ*

$$v\left(S\cup\{i\}\right)-v\left(S\right)\le v\left(T\cup\{i\}\right)-v\left(T\right)$$

բոլոր i *-րդ խաղացողին չպարունակող* $S\subset T\subseteq I\setminus\{i\}$ *կոալիցիաների համար:*

<u>Ապացույց</u>. Նախ ապացուցենք անհրաժեշտությունը: Դիցուք $L\subset M$ կոալիցիաները չեն պարունակում i -ն: Խաղի ուռուցիկությունից հետևում է, որ

$$v\left(L\cup\{i\}\right)+v\left(M\right)\le v\left(L\cup M\cup\{i\}\right)+v\left(L\cup\{i\}\cap M\right),$$

որտեղից`

$$v\left(L\cup\{i\}\right)+v\left(M\right)\le v\left(M\cup\{i\}\right)+v\left(L\right)\Rightarrow v\left(L\cup\{i\}\right)-v\left(L\right)\le v\left(M\cup\{i\}\right)-v\left(M\right):$$

Ապացուցենք բավարարությունը: Դիտարկենք երկու` $L\subset M$ կոալիցիաներ և կամայական $K$ կոալիցիա, այնպիսին, որ $M\cap K=\varnothing$: Դիցուք` $K=\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}$: Այս դեպքում ցանկացած $l=1,2,\ldots,k$ համար`

$$v\left(L\cup\{i_1,i_2,\ldots,i_l\}\right)-v\left(L\cup\{i_1,i_2,\ldots,i_{l-1}\}\right)\le v\left(M\cup\{i_1,i_2,\ldots,i_l\}\right)-v\left(M\cup\{i_1,i_2,\ldots,i_{l-1}\}\right):$$

Գումարելով այս անհավասարությունները ըստ l -ի 1-ից k, կստանանք, որ ցանկացած $L\subset M$ և $K\subseteq I\setminus M$ կոալիցիաների համար`

$$v\left(L\cup K\right)-v\left(L\right)\le v\left(M\cup K\right)-v\left(M\right):$$

Այժմ վերցնենք կամայական S,T կոալիցիաներ: Նախորդ անհավասարությունից հետևում է, որ

$$v\left(\left(S\cap T\right)\cup\left(S\setminus T\right)\right)-v\left(S\cap T\right)\le v\left(T\cup\left(S\setminus T\right)\right)-v\left(T\right),$$

կամ`

$$v\left(S\right)-v\left(S\cap T\right)\le v\left(S\cup T\right)-v\left(T\right):$$

Ապացույցն ավարտված է:

Թեորեմ 6.5.4: *Ուռուցիկ խաղերում միջուկը դատարկ չէ:*

Ապացույց: Դիցուք տրված է $(0,1)$ տեսքի $\langle I,v\rangle$ ուռուցիկ խաղը: Նշանակենք`

$$x_1 = v\{1\}, x_i = v(\{1,2,...,i\}) - v(\{1,2,...,i-1\}), i \in I \setminus \{1\}:$$

$v(S)$ ֆունկցիայի սուպերադիտիվությունից (տես (6.5.1)) հետևում է, որ $x_i \geq 0$, $\sum_{i\in I} x_i = v(I)$, ուստի $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ վեկտորը բաժանք է: Վերցնենք կամայական $S = \{i_1, i_2, ..., i_s\}$ կոալիցիա և դիտարկենք երկու` $L = \{i_1, i_2, ..., i_{p-1}\}$ և $M = \{1, 2, ..., i_{p-1}\}$, $1 \leq p \leq s$ կոալիցիաներ: Քանի որ $L \subset M$ , ապա, ըստ նախորդ թեորեմի`

$$v\{i_1, i_2, ..., i_p\} - v\{i_1, i_2, ..., i_{p-1}\} \leq v\{1, 2, ..., i_p\} - v\{1, 2, ..., i_{p-1}\} = x_p :$$

Գումարելով այս անհավասարությունները ըստ p-ի 1-ից s, կստանանք`

$$v\{i_1, i_2, ..., i_s\} = v(S) \leq \sum_{i\in S} x_i :$$

Հետևաբար, ըստ 6.5.1 թեորեմի, x բաժանքը պատկանում է $C(v)$ միջուկին:

Ակներև է, որ այս թեորեմում էական չէ խաղացողների համարակալումը, ուստի միջուկին կպատկանեն նաև բոլոր $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ վեկտորները, որտեղ`

$$x_1 = v(\{i_1\}), x_2 = (v(\{i_1, i_2\}) - v(\{i_1\})), ..., x_n = (v(\{i_1, i_2, ..., i_n\}) - v(\{i_1, i_2, ..., i_{n-1}\})):$$

Ուռուցիկ խաղերի միջուկի ամբողջական նկարագրությունը տալիս է հետևյալ թեորեմը, որը բերում ենք առանց ապացույցի:

Թեորեմ 6.5.5: *Ուռուցիկ խաղի միջուկը ուռուցիկ բազմանիստ է, որի ծայրակետերի բազմությունը համընկնում է նախորդ թեորեմում սահմանված բաժանքների բազմության հետ:*

Վերևում դիտարկված օպտիմալության սկզբունքները հանգեցնում են օպտիմալ բաժանքների բազմությունների, որոնցից այնուհետև հարկ է լինում ընտրել լավագույն բաժանքը, օգտվելով այս կամ այն հանգամանքներից: Հաջորդ օպտիմալության սկզբունքը զերծ է այդ թերություններից, որոշում է միակ բաժանք, ընդ որում այն գոյություն ունի ցանկացած խաղում: Այս սկզբունքով որոշվող բաժանքը կոչվում է խաղի արժեք, կամ Շեպլիի վեկտոր: Նախ տանք մի քանի սահմանումներ:

Սահմանում 6.5.11: $\langle I,v\rangle$ խաղի *կրիչ* անվանում են այն $T\subseteq I$ կոալիցիան, որ $v(S)=v(S\cap T)$ ցանկացած $S\subseteq I$ համար:

Սահմանում 6.5.12: Դիցուք π-ն n տարրերի որևէ տեղափոխություն է և $S=\{i_1,i_2,...,i_s\}\subseteq I$ կոալիցիաի համար՝ $\pi S=\{\pi(i_1),\pi(i_2),...,\pi(i_s)\}$: $\langle I,\pi v\rangle$-ով նշանակենք խաղը, որի համար՝

$$\pi v(S)=v(\pi S),\ S\subseteq I:$$

Սահմանում 6.5.13: $\langle I,v\rangle$ *խաղի արժեք*, կամ *Շեպլիի վեկտոր* կոչվում է $\varphi[v]=(\varphi_1[v],\varphi_2[v],...,\varphi_n[v])$ բաժանքը, որը բավարարում է Շեպլիի հետևյալ երեք աքսիոմներին:

Ա1. Եթե $T\subseteq I$-ն խաղի կրիչ է, ապա

$$\sum_{i\in T}\varphi_i[v]=v(I):$$

Ա2. Ցանկացած $i\in I$ և π տեղափոխության համար՝

$$\varphi_{\pi(i)}[\pi v]=\varphi_i[v]:$$

Ա3. Ցանկացած երկու՝ $\langle I,v\rangle$ և $\langle I,u\rangle$ խաղերի համար՝

$$\varphi_i[u+v]=\varphi_i[u]+\varphi_i[v], i\in I:$$

Թեորեմ 6.5.6: *Ցանկացած կոպերատիվ խաղում գոյություն ունի միակ վեկտոր, որը բավարարում է Ա1-Ա3 աքսիոմների:*

Թեորեմի ապացույցը կարելի է գտնել խաղերի տեսության դասագրքերում (տես, օրինակ, [16],[25]): Նշենք միայն, որ թեորեմը կառուցողական է և տալիս է Շեպլիի վեկտորի բացահայտ տեսքը`

$$\varphi_i[v]=\sum_{\substack{S\subset I\\ i\in S}}\frac{(|S|-1)(|I\setminus S|)}{n!}\left[v(S)-v(S\setminus\{i\})\right],\ i\in I: \tag{6.5.2}$$

Օրինակ 6.5.1: Դիցուք բաժնետիրական ընկերությունը ունի չորս բաժնետեր, որոնք համապատասխանաբար ունեն 10, 20, 30 և 40 բաժնետոմսեր: Ենթադրենք, որ S կոալիցիաի շահույթը հավասար է 1-ի, եթե այդ կոալիցիայի անդամների բաժնետոմսերի ընդհանուր քանակը գերազանցում է բոլոր բաժնետոմսերի 50 տոկոսը և 0-ի այլ դեպքում (սա նշանակում է, որ այդ կոալիցիան կարող է հաղթել քվեարկության դեպքում): Այս խաղում Շեպլիի վեկտորը կունենա հետևյալ տեսքը` $(1/12, 3/12, 3/12, 5/12)$: Այստեղից երևում է, որ խաղացողի «ուժը» որոշվում է ոչ միայն բաժնետոմսերի քանակով, այլ նաև որոշումների վրա ազդելու հնարավորություններով: Օրինակ երկրորդ և երրորդ խաղացողների բաժնետոմսերի քանակը տարբեր է, սակայն հնարավորությունները նույնն են:

Օրինակ 6.5.2: Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը: Դիցուք որևէ կազմակերպություն ունի 1,8 մլն դրամ ազատ միջոցներ և ցանկանում է ներդնել բանկ բարձր տոկոսադրույքով: Բանկային տոկոսադրույթները հետևյալն են`

Գումար	Տոկոս
0-ից մինչև 1մլն	8
1մլն-3մլն	10
3մլն-5մլն	12

Բարձր տոկոսադրույքով եկամուտ ստանալու նպատակով իրեն համաձայն են միանալ ևս երկու կազմակերպություն` համապատասխանաբար 900000 և 300000 դրամ միջոցներով: Հիմնական հարցը, որը առաջանում է այս խնդրում` ինչպես բաշխել ստացված եկամուտը: Այստեղ պարզունակ լուծումը կարող է լինել բաշխումը ըստ ներդրած գումարի 12 տոկոսի: Սակայն այս լուծումը հաշվի չի առնում մասնակիցների յուրահատկությունները:

Կառուցենք 3 խաղացողի կոպերատիվ $\langle I, v\rangle$ խաղ, որտեղ $I=\{1,2,3\}$, իսկ $v(S)$ ֆունկցիան որոշվում է այն գումարով, որը կստանան S կոալիցիայի մասնակիցները, գործելով մյուսներից անկախ: Հարմարության համար նշանակենք՝

$$v(\{i\})=v_i, v(\{i,j\})=v_{ij}, v(\{1,2,3\})=v_{123}:$$

Այսպիսով՝

$$\begin{aligned}&v_1=180000,\ v_2=72000,\ v_3=24000,\\&v_{12}=270000,\ v_{13}=220000,\ v_{23}=120000,\\&v_{123}=360000:\end{aligned}$$

Դժվար չէ ստուգել, որ կառուցված խաղը ուռուցիկ է: Գտնենք խաղի միջուկը: 6.5.5 թեորեմի համաձայն բավական է գտնել միջուկի ծայրակետերը: Երեք խաղացող կարող են կազմել 6 հնարավոր հերթականություն՝

$$(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1):$$

Ուստի միջուկի ծայրակետերը վեցն են՝

$$\begin{aligned}&x^1=(180000,90000,90000),\\&x^2=(180000,140000,40000),\\&x^3=(198000,72000,90000),\\&x^4=(240000,72000,48000),\\&x^5=(196000,140000,24000),\\&x^6=(240000,96000,24000):\end{aligned}$$

Այսպիսով, միջուկը այս վեց վեկտորների ուռուցիկ թաղանթն է և միջուկի ցանկացած բաժանք կարող է հանդիսանալ եկամուտների օպտիմալ բաշխում:

Հաշվենք նաև Շեպլիի վեկտորը և համեմատենք ստացված լուծման հետ: Օգտվելով (6.5.2) բանաձևից, կստանանք՝

$$\varphi_1 = \frac{2!}{3!}(v_{123} - v_{23}) + \frac{1!1!}{3!}(v_{12} - v_2) + \frac{1!1!}{3!}(v_{13} - v_3) + \frac{2!}{3!}(v_1 - 0) = 205666,66...;$$
$$\varphi_2 = \frac{2!}{3!}(v_{123} - v_{13}) + \frac{1!1!}{3!}(v_{12} - v_1) + \frac{1!1!}{3!}(v_{23} - v_3) + \frac{2!}{3!}(v_2 - 0) = 101666,66...;$$
$$\varphi_3 = \frac{2!}{3!}(v_{123} - v_{12}) + \frac{1!1!}{3!}(v_{13} - v_1) + \frac{1!1!}{3!}(v_{23} - v_2) + \frac{2!}{3!}(v_3 - 0) = 52666,66...:$$

Դժվար չէ ստուգել, որ Շեպլիի վեկտորը համընկնում է միջուկի ծանրության կենտրոնի հետ և կարող է համարվել այս խնդրի լավագույն լուծում:

Օրինակ 6.5.3: Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը, կապված ապահովագրական ընկերությունների գործունեության հետ: Դիցուք ունենք 100 անհատներից բաղկացած խումբ, որոնցից յուրաքանչյուրը կարող է տվյալ ժամանակահատվածում կորցնել 1 միավոր բարիք $p_1 = 0,01$ հավանականությամբ: Իրենց ռիսկերը նվազեցնելու համար նրանք որոշում են միավորվել և ստեղծել փոքր ապահովագրական ընկերություն: Ենթադրենք, որ խմբի հիմնադիր կապիտալը պետք է լինի այնպիսին, որ ընկերության սնանկանալու հավանականությունը չգերազանցի 0,001-ը: Ենթադրելով պարզության համար, որ ռիսկերը անկախ են, մոտարկենք բինոմիալ բաշխվածությունը նորմալ բաշխվածությամբ և, օգտվելով այսպես կոչված “3 սիգմաների օրենքից”, հիմնադիր կապիտալի համար կստանանք հետևյալ արժեքը՝

$$V_1 = n_1 p_1 + 3\sqrt{n_1 p_1 (1 - p_1)} = 10 + 9 = 19:$$

Այսպիսով, յուրաքանչյուրը պետք է ներդնի 0,19 միավոր:

Դիցուք երկրորդ խումբը նույնպես բաղկացած է 100 անհատից, սակայն երկրորդ խմբի անդամները նույն ժամանակահատվածում 1 միավորը կորցնում են $p_2 = 0,02$ հավանականությամբ: Եթե իրենք նույնպես ստեղծեն ապահովագրական միություն, ապա այս խմբի ապահովագրական ֆոնդը հավասար է՝

$$V_2 = n_2 p_2 + 3\sqrt{n_2 p_2 (1 - p_2)} = 20 + 12 = 32:$$

Դիտարկենք նաև երրորդ խումբը, որը նորից բաղկացած է 120 անդամից, որոնց համար 1 միավոր բարիք կորցնելու հավանականությունը $p_3 = 0,03$ է: Այս խմբի ապահովագրական ֆոնդը հավասար է՝

$$V_3 = n_3 p_3 + 3\sqrt{n_3 p_3 (1-p_3)} = 36+15 = 51:$$

Այժմ ենթադրենք, որ այս երեք ընկերությունները որոշում են միավորվել և ստեղծել մեկ ընդհանուր ընկերություն: Հաշվենք այս միցյալ ընկերության ապահովագրական ֆոնդը՝

$$V_{123} = n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 + 3\sqrt{n_1 p_1 (1-p_1) + n_2 p_2 (1-p_2) + n_3 p_3 (1-p_3)} = 66+21 = 87:$$

Ինչպես տեսնում ենք, միավորումը թույլ է տալիս նվազեցնել ապահովագրական ֆոնդի ծավալը, քանի որ եթե ընկերությունները գործում են միմիանցից անկախ, ապա ապահովագրական ֆոնդերի գումարը կկազմի $19+32+51=102$ իսկ միավորվելու դեպքում՝ 87 միավոր: Սակայն միավորվելիս հարկավոր է որոշել յուրաքանչյուր խմբի ներդրումը ընդհանուր ապահովագրական ֆոնդում: Այս խնդիրը դիտարկենք որպես կոպերատիվ խաղ՝ $G = \langle I, v \rangle$, որտեղ $I = \{1,2,3\}$, և՝

$$\begin{aligned}
&v\{1\} = V_1 = 19,\\
&v\{2\} = V_2 = 32,\\
&v\{3\} = V_3 = 51,\\
&v\{1,2\} = n_1 p_1 + n_2 p_2 + 3\sqrt{n_1 p_1 (1-p_1) + n_2 p_2 (1-p_2)} = 30+15 = 45,\\
&v\{2,3\} = n_2 p_2 + n_3 p_3 + 3\sqrt{n_2 p_2 (1-p_2) + n_3 p_3 (1-p_3)} \approx 75,3,\\
&v\{1,3\} = n_1 p_1 + n_3 p_3 + 3\sqrt{n_1 p_1 (1-p_1) + n_3 p_3 (1-p_3)} \approx 63,5,\\
&v\{1,2,3\} = V_{123} = 87:
\end{aligned}$$

Դժվար չէ ստուգել, որ այս խաղի համար Շեպլիի վեկտորը կտա հետևյալ բաժանքը՝ $(14,9;26,9;45,6)$: Դուրս գրենք խաղի միջուկը բնութագրող առնչությունները՝

$$\begin{aligned}
&x_1 \le 19,\\
&x_2 \le 32,\\
&x_3 \le 51,\\
&x_1 + x_2 \le 45,\\
&x_2 + x_3 \le 75,3,\\
&x_1 + x_3 \le 63,5,\\
&x_1 + x_2 + x_3 \le 87:
\end{aligned}$$

Հեշտությամբ ստուգվում է, որ Շեպլիի վեկտորը պատկանում է խաղի միջուկին, հետևաբար այն կարող է դիտվել, որպես խնդրի օպտիմալ բաշխում: Այսպիսով, ընդհանուր ապահովագրական ընկերություն ստեղծելու համար առաջին խմբի անդամները պետք է ներդնեն յուրաքանչյուրը մոտավորապես 0,15 միավոր, երկրորդ խմբի անդամները մոտավորապես 0,27 միավոր և երրորդ խմբի անդամները՝ 0,38 միավոր յուրաքանչյուրը:

ԴԻՆԱՄԻԿ ՄՈԴԵԼՆԵՐ

Սույն բաժնում դիտարկվում են որոշումներ ընդունելու այնպիսի խնդիրներ, որտեղ որոշումը ընդունվում է ժամանակի ընթացքում՝ քայլ առ քայլ, կամ անընդմեջ:

6.1. ԴԻՆԱՄԻԿ ԾՐԱԳՐՈՒՄ

Դիցուք ձեռնարկությունն ունի որևէ արտադրանք ստանալու երկու տեխնոլոգիական պրոցեսներ, ընդ որում առաջին պրոցեսում x քանակությամբ ռեսուրսը /պաշարը/ բերում է $g(x)$ եկամուտ և սկզբնական պաշարից մնում է αx քանակություն, իսկ երկրորդ պրոցեսում x պաշարը բերում է $h(x)$ եկամուտ և պաշարը նվազում է մինչև βx: Դիցուք պաշարի սկզբնական քանակը x է: Այն բաշխելով երկու պրոցեսների միջև, համապատասխանաբար y և $x-y$ մասերի, ձեռնարկությունը կստանա $R_1(x,y)=g(y)+h(x-y)$ եկամուտ, իսկ մնացյալ պաշարը հավասար կլինի $x_1=\alpha y+\beta(x-y)$: Դիցուք մնացած պաշարը նորից բաշխում ենք երկու պրոցեսների միջև՝ x_1-ը տրոհում ենք y_1 և x_1-y_1 մասերի, ստանալով $g(y_1)+h(x_1-y_1)$ եկամուտ և $x_2=\alpha y_1+\beta(x_1-y_1)$ մնացյալ պաշար: Այս դեպքում բաշխման երկու քայլերից ստացված եկամուտը հավասար կլինի՝

$$R_2(x,y,y_1)=g(y)+h(x-y)+g(y_1)+h(x_1-y_1): \tag{16.1}$$

Կրկնելով այս գործնթացը, n-րդ քայլում կստանանք՝

$$R_n(x,y,y_1,...,y_{n-1})=\sum_{i=1}^{n-1}R_i(x,y,y_1,...,y_{i-1}),$$

որտեղ՝

$$x_1=\alpha y+\beta(x-y), 0\le y\le x,$$
$$x_i=\alpha y_{i-1}+\beta(x_{i-1}-y_{i-1}), 0\le y_{i-1}\le x_{i-1}, i=2,3,...,n:$$

Առավելագույն վերջնական շահույթը կստանանք մաքսիմալացնելով $R_n(x,y_1,...,y_n)$ ֆունկցիան $y_1,...,y_n$ փոփոխականների՝ վերևում նշված անհավասարություններով որոշվող տիրույթում:

Եթե ենթադրենք, որ $g(x)$ և $h(x)$ ֆունկցիաները անընդհատ և ածանցելի են իրենց որոշման տիրույթում, ապա այս խնդիրը կարելի է լուծել դասական եղանակներով, օրինակ դիտարկելով որպես պայմանական էքստրեմումի խնդիր: Սակայն դասական եղանակները հիմնականում տալիս են տիրույթի ներսում էքստրեմումի գոյության անհրաժեշտ պայմաններ և հարկավոր է լինում ստուգել ֆունկցիայի վարքը տիրույթի եզրում: Այս ամենը շատ է բարդեցնում խնդիրը մեծ n-ի դեպքում:

Դինամիկ ծրագրման եղանակը թույլ է տալիս նման խնդիրները լուծել քայլ առ քայլ: Նկարագրենք այդ եղանակը վերևում բերված օրինակի վրա:

Քանի որ $R_n(x,y,y_1,...,y_{n-1})$ ֆունկցիայի մաքսիմալ արժեքը կախված է միայն սկզբնական ռեսուրսի x քանակից և քայլերի n թվից, նշանակենք՝

$$f_1(x)=\max_{0\le y\le x}\left[g(y)+h(x-y)\right],\ f_n(x)=\max_{y,y_1,...y_{n-1}} R_n(x,y,y_1,...,y_{n-1})$$

Բաշխման երկու քայլերից հետո ամբողջ ստացած եկամուտը հավասար է առաջին քայլում ստացած եկամուտի և երկրորդ քայլում $x_1=\alpha y+\beta(x-y)$ ռեսուրսը բաշխելիս ստացված եկամուտի գումարին: Ինչպիսին էլ լինի առաջին քայլում ընտրած y-ը, մնացորդային ռեսուրսը հաջորդ քայլում պետք է բաշխվի օպտիմալ ձևով: Այսպիսով, եթե y_1-ը օպտիմալ է ընտրվել, ապա (16.1) արտահայտությունը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$R_2(x,y,y_1)=g(y)+h(x-y)+f_1\left(\alpha y+\beta(x-y)\right):$$

Իսկ մաքսիմալ եկամուտի համար կստանանք՝

$$f_2(x)=\max_{0\le y\le x}[g(y)+h(x-y)+f_1\left(\alpha y+\beta(x-y)\right)]:$$

Շարունակելով այս դատողությունները, n-քայլանի գործընթացի համար կստանանք հետևյալ բանաձևը՝

$$f_n(x)=\max_{0\le y\le x}[g(y)+h(x-y)+f_{n-1}\left(\alpha y+\beta(x-y)\right)],\ n\ge 2, \tag{16.2}$$

$$f_1(x)=\max_{0\le y\le x}\left[g(y)+h(x-y)\right]:$$

Այս ռեկուրենտ բանաձևերը թույլ են տալիս n-չափանի խնդիրը հանգեցնել n հատ մեկ չափանի խնդիրների: Իրոք, դիցուք՝

$$f_1(x)=\max_{0\le y\le x}\left[g(y)+h(x-y)\right]=\left[g(y_1)+h(x-y_1)\right]:$$

Երկրորդ քայլում հաշվում ենք՝

$$f_2(x)=\max_{0\le y\le x}[g(y)+h(x-y)+f_1(\alpha y+\beta(x-y))]:$$

Ապա հաշվում ենք $f_3(x)$ և այսպես շարունակ: Արդյունքում ստանում ենք երկու հաջորդականություններ՝ $\{y_i\}$ և $\{f_i(x)\}$, $i=1,2,\ldots$, որոնք տալիս են տրված ռեսուրսով և քայլերով բաշխման խնդրի օպտիմալ լուծումը: Այն դեպքերում, երբ քայլերի թիվը շատ մեծ է, կարելի է (16.2) ռեկուրենտ բանաձևերի փոխարեն օգտվել ֆունկցիոնալ հավասարումից՝

$$f(x)=\max_{0\le y\le x}[g(y)+h(x-y)+f(\alpha y+\beta(x-y))]:$$

Լուծման այս նույն եղանակը կարելի է կիրառել տարբեր խնդիրներում: Դիտարկենք, օրինակ, պայմանական էքստրեմումի բազմաչափ խնդիր՝

$$\begin{cases} F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)\to\max, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i=c, \\ x_i\ge 0, i=1,2,\ldots,n \end{cases}:$$

Ենթադրենք, որ բոլոր $g_i(x)$ ֆունկցիաները անընդհատ են $x\ge 0$ տիրույթում: Քանի որ խնդրի լուծումը կախված է միայն c-ից և n-ից, ուստի կարելի է նշանակել՝

$$f_n(c)=\max_{x_1,x_2,\ldots,x_n} F(x_1,x_2,\ldots,x_n):$$

Դատելով այնպես, ինչպես նախորդ խնդրում, կարող ենք ստանալ ռեկուրենտ բանաձև՝

$$f_1(c) = g_1(c),$$
$$f_i(c) = \max_{0 \le x \le c} \left[g_i(x) + f_{i-1}(c-x) \right] \qquad (16.3)$$

$i = 2, \dots, n$ համար:

Այս երկու բերված մոդելներում կիրառված է դինամիկ ծրագրման խնդիրների լուծման հիմնական օպտիմալության սկզբունքը՝ օպտիմալ կերպով բաշխել ռեսուրսը վերջին քայլում, եթե հայտնի է, թե ինչպես օպտիմալ կերպով բաշխել մնացորդային ռեսուրսը նախորդ քայլերում և այդպես, քայլ առ քայլ գալ մինչև սկիզբ:

Բերենք թվային օրինակ: Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը՝

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^2}{c_i} \to \min, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = c, \\ x_i \ge 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Այստեղ $c_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$:

Այս խնդրի համար (16.3) բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$f_k(c) = \min_{0 \le x \le c} \left(f_{k-1}(c-x) + \frac{x^2}{c_k} \right):$$

Կազմենք՝

$$f_1(c) = R_1(c) = \frac{c^2}{c_1}, \ \ R_2(x) = \frac{(c-x)^2}{c_1} + \frac{x^2}{c_2}:$$

Ածանցելով և հավասարեցնելով զրոի, կստանանք՝

$$x_2(c)=\frac{cc_2}{c_1+c_2},\quad c-x_2(c)=\frac{cc_1}{c_1+c_2},\quad f_2(c)=\min_{0\le x\le c}R_2(x)=\frac{c^2}{c_1+c_2}:$$

Այժմ ենթադրենք, որ

$$f_k(c)=\frac{c^2}{c_1+c_2+\ldots+c_k}$$

և կազմենք

$$f_{k+1}(c)=\min_{0\le x\le c}\left(\frac{(c-x)^2}{c_1+c_2+\ldots+c_k}+\frac{x^2}{c_{k+1}}\right):$$

Դժվար չէ ստուգել, որ

$$x_{k+1}(c)=\frac{cc_{k+1}}{c_1+c_2+\ldots+c_{k+1}},\quad f_{k+1}(c)=\frac{c^2}{c_1+c_2+\ldots+c_{k+1}}:$$

Այսպիսով, ցանկացած $n\ge 2$ համար՝

$$\min\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{c_i}=\frac{c^2}{c_1+c_2+\ldots+c_n}:$$

Իսկ ռեսուրսի օպտիմալ բաշխման $x_1^0,x_2^0,\ldots x_n^0$ կետերը ստանալու համար օգտվենք դինամիկ ծրագրման հիմնական սկզբունքից. նախ որոշենք x_n^0-ն՝

$$x_n^0=x_n(c)=\frac{cc_n}{c_1+c_2+\ldots+c_n}:$$

Հաջորդ քայլում որոշվում է x_{n-1}^0-ն ՝

$$x_{n-1}^0=x_{n-1}\left(c-x_n^0\right)=\frac{\left(c-x_n^0\right)c_{n-1}}{c_1+c_2+\ldots+c_{n-1}}=\left(c-\frac{cc_n}{c_1+c_2+\ldots+c_n}\right)\frac{c_{n-1}}{c_1+c_2+\ldots+c_{n-1}}=$$
$$=\frac{c\left(c_1+c_2+\ldots+c_n\right)c_{n-1}-cc_{n-1}c_n}{\left(c_1+c_2+\ldots+c_n\right)\left(c_1+c_2+\ldots+c_{n-1}\right)}=\frac{cc_{n-1}\left(c_1+c_2+\ldots+c_{n-1}\right)}{\left(c_1+c_2+\ldots+c_n\right)\left(c_1+c_2+\ldots+c_{n-1}\right)}=\frac{cc_{n-1}}{\left(c_1+c_2+\ldots+c_n\right)}:$$

Շարունակելով, կստանանք՝

$$x_i^0 = \frac{cc_i}{\left(c_1 + c_2 + \ldots + c_n\right)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n:$$

6.2. ՕՊՏԻՄԱԼ ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Օպտիմալ կառավարման տեսությունը ուսումնասիրում է որոշումներ ընդունելու այնպիսի խնդիրներ, որտեղ որոշումներն ընդունվում են անընդհատ, ժամանակի յուրաքանչյուր պահին:

Որպես օրինակ դիտարկենք ավտոմեքենայի ուղղագիծ շարժումը: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ այդ շարժումը կատարվում է իրական առանցքով, և ժամանակի t պահին մեքենան գտնվում է իրական առանցքի $x(t)$ կետում: Մեքենայի վիճակը յուրաքանչյուր t պահին կարելի է նկարագրել $x(t)$ դիրքով և $\dot{x}(t)$ արագությամբ: Ուղղագիծ շարժման դեպքում մեքենայի կառավարումը կատարվում է վարորդի կողմից մեքենայի վրա ուժ կիրառելով (այս կամ այն չափով սեղմելով "գազի պեդալը") : Ժամանակի t պահին կիրառվող ուժը նշանակենք $u(t)$-ով: Հաշվի առնելով, որ արագացումը հավասար է $\ddot{x}(t)$, ըստ Նյուտոնի երկրորդ օրենքի շարժման հավասարումը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$m\ddot{x} = u - b\dot{x}, \tag{7.2.1}$$

որտեղ m-ը մեքենայի զանգվածն է, $b\dot{x}$-ը շփման ուժը: Որպեսզի ստանանք մեքենայի վիճակի պարամետրերի անմիջական կախվածությունը կիրառվող ուժից, նշանակենք՝ $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$: Այս դեպքում (7.2.1) հավասարումը կվերածվի համարժեք համակարգի՝

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{m}u - \dfrac{b}{m}\dot{x}_1 \end{cases} :$$

Ընտրելով յուրաքանչյուր t պահին $u(t)$ կառավարումը, և լուծելով դիֆերենցիալ հավասարումների սույն համակարգը, կարելի է ստանալ մեքենայի շարժման $\left(x_1(t), x_2(t)\right)$ հետագիծը ցանկացած սկզբնական դիրքի դեպքում:

Ընդհանուր դեպքում *կառավարվող օբյեկտի* վիճակը կարող է նկարագրվել $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ վեկտորով, որն անվանում են *ֆազային կետ,* շարժումը կարող է կառավարվել $u = (u_1, u_2, ..., u_m) \in U \subseteq R^m$ պարամետրերով, որոնք անվանում են *կառավարող պարամետրեր,* իսկ U բազմությունը՝ *կառավարման տիրույթ*: Շարժման օրենքը տրվում է դիֆերենցիալ հավասարումների

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m\right), \\ \dot{x}_2 = f_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = f_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m\right) \end{cases} \tag{7.2.2}$$

համակարգով, որոնք անվանում են *շարժման հավասարումներ* : Այս համակարգը կարելի է գրել վեկտորական տեսքով՝

$$\dot{x} = f\left(x, u\right),$$

որտեղ f -ով նշանակել ենք $\left(f_1, f_2, \ldots, f_n\right)$ վեկտոր-ֆունկցիան: Ակներև է, որ տարբեր եզրային պայմանների և տարբեր $u(t)$ կառավարումների դեպքում կստանանք տարբեր $x(t)$ հետագծեր: Դիցուք տարածության մեջ տրված է որևէ Σ մակերևույթ (մասնավորապես այն կարող է բաղկացած լինել մեկ կետից) և ենթադրենք, որ մեր կառավարվող գործընթացը սկսվում է ժամանակի t_0 պահին $x^0 = x(t_0)$ կետից և ավարտվում է t_1 պահին, երբ $x(t)$ կետը հասնում է Σ մակերևույթին՝ $x(t_1) \in \Sigma$: Այս մակերևույթն անվանենք *տերմինալ մակերևույթ*: Կառավարման նպատակը տրվում է

նպատակային ֆունկցիոնալով, որը ընդհանուր դեպքում ունի հետևյալ տեսքը՝

$$J\left(x, u\right) = \int_{t_0}^{t_1} L\left(x(t), u(t)\right) dt + H\left(s\right), \tag{7.2.3}$$

որտեղ $H(s)$ ֆունկցիան որոշված է Σ տերմինալ մակերևույթի վրա: Մասնավոր դեպքում, երբ $H(s) \equiv 0$, խնդիրը անվանում են *Լագրանժի խնդիր*, իսկ երբ $H(s) \equiv 0$, $L \equiv 1$ (այսինքն՝ $J(x,u) = t_1 - t_0$), խնդիրն անվանում են *արագագործության խնդիր*: (x,u) զույգը, որտեղ $u(t)$-ն որևէ կառավարում է, իսկ $x(t)$-ն այդ կառավարմանը համապատասխանող (17.2) համակարգի միարժեք լուծումն է (եթե այդպիսին գոյություն ունի), որը սկսվում է x^0 կետից և ավարտվում Σ տերմինալ մակերևույթի վրա, կոչվում է *կառավարող պրոցես*: Կառավարվող պրոցեսը, որի դեպքում (17.3) ֆունկցիոնալը ստանում է էքստրեմալ արժեքը (մաքսիմալ կամ մինիմալ, կախված խնդրի դրվածքից), կոչվում է *օպտիմալ կառավարվող պրոցես*:

Այսպիսով, օպտիմալ կառավարման խնդիրը տրված է, եթե տրված են՝

1. կառավարման $U \subseteq R^m$ տիրույթը,
2. տերմինալ Σ մակերևույթը,
3. շարժման $\dot{x} = f(x,u)$ հավասարումները,
4. նպատակային $J(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t),u(t))dt + H(s)$ ֆունկցիոնալը:

Չնայած օպտիմալ կռավարման տեսությունը ստեղծվել է որպես դիֆերենցիալ խաղերի մասնավոր դեպք, և սկզբնական շրջանում ուսումնասիրել է խնդիրներ, որոնք կապված էին ֆիզիկական շարժման հետ՝ տիեզերագնացության, բալիստիկ հրթիռների, ինքնաթիռների ավտոմատ կառավարման և այլ բնագավառներում, այժմ այս տեսությունը լայն կիրառություններ է ստացել նաև տնտեսագիտության, բժշկության, քաղաքաշինության և այլ բնագավառներում: Բերենք մի քանի օրինակ: Յուրաքանչյուր մարդու առողջական վիճակը կարելի է նկարագրել վերջավոր թվով պարամետրերով՝ ճնշում, ջերմաստիճան, արյան բաղադրություն և այլն, այսինքն ներկայացնել, որպես ֆազային կետ: Յուրաքանչյուր պահին ընտրելով դեղորայքների տեսակը և քանակը (կառավարումները) կարելի է դնել խնդիր՝ մինիմալ ժամանակում կամ մինիմալ վնասներով առողջացնել հիվանդին:

Բերենք մեկ այլ օրինակ: Քաղաքի կամ երկրի տնտեսական իրավիճակը կարելի է նկարագրել մի շարք պարամետրերով՝ բյուջե, էներգետիկա, տրանսպորտային ցանց, տվյալ ճյուղի գործարանների հզորություններ և այլն: Այդ պարամետրերը կարող են փոփոխվել վարկային, հարկային և այլ միջոցառումների շնորհիվ: Կարող է դրվել խնդիր՝ մինիմալ ժամանակահատվածում, կամ մինիմալ ծախսերով հզորացնել երկիրը:

Դինամիկ ծրագրման մոտեցում: Պարզության համար հիմնական մոտեցումները և արդյունքները դիտարկենք արագագործության խնդրի օրինակի վրա: Դիցուք ֆազային x կետից հարկավոր է մինիմալ ժամանակում, շարժվելով շարժման (17.2) հավասարումներին համաձայն, հասնել x^1 ֆազային կետ: Այստեղ վերջնական x^1 կետը համարում ենք ֆիքսված, իսկ սկզբնական x կետը փոփոխական, այսինքն խնդիրը փորձում ենք լուծել ցանկացած սկզբնական դիրքի համար:

Ենթադրություն 1: Ենթադրենք, որ ցանկացած սկզբնական x կետի համար գոյություն ունի միակ օպտիմալ (x,u) պրոցես և $T(x)$ -ով նշանակենք x կետից x^1 կետ հասնելու մինիմալ ժամանակը:

Ենթադրություն 2: Ենթադրենք, որ այս բաժնում դիտարկվող բոլոր ֆունկցիաները անընդհատ են և ունեն այնքան անընդհատ մասնակի ածանցյալներ, որքան պահանջվի: Հետագա դատողություններում ավելի հարմար է $T(x)$ ժամանակի փոխարեն դիտարկել հակադարձ՝ $\theta(x)=-T(x)$ ժամանակը:

Դիցուք x^0 -ն փազային տարածության որևէ կետ է, և $u^0 \in U$: Ենթադրենք, որ t_0 պահին մեր օբյեկտը գտնվում է x^0 կետում և շարժվում է u^0 հաստատուն կառավարման ներքո, համաձայն շարժման (17.2) հավասարումների, մինչև $x(t)$ կետը, ծախսելով $t-t_0$ ժամանակ: $x(t)$ կետից շարժվելով օպտիմալ մինչև x^1 կետը կծախսվի $T(x(t))$ ժամանակ: Ուստի, x^0 կետից մինչև x^1 կծախսվի $(t-t_0)+T(x(t))$ ժամանակ: Սակայն, քանի որ x^0 կետից մինչև x^1 հասնելու օպտիմալ (մինիմալ) ժամանակը հավասար է $T(x^0)=T(x(t_0))$, ապա՝

$$T(x(t_0)) \le (t-t_0)+T(x(t)):$$

Փոխարինելով $T(x)$ ֆունկցիան $-\theta(x)$-ով և բաժանելով $t-t_0$ վրա, կստանանք՝

$$\frac{\theta(x(t))-\theta(x(t_0))}{t-t_0} \le 1:$$

Անցնելով սահմանին, երբ $t \to t_0$, ստանում ենք՝

$$\left.\frac{d}{dt}\theta(x(t))\right|_{t=t_0} \le 1:$$

Եվ, քանի որ $\dot{x}_i(t)=f_i(x,u)$, ապա վերջնականապես ստանում ենք՝

$$\left.\frac{d}{dt}\theta(x(t))\right|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\theta(x^0)}{\partial x_i} \left.\dot{x}_i(t)\right|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\theta(x^0)}{\partial x_i} f_i(x^0,u^0) \le 1:$$

Այստեղ x^0 և u^0 կետերը կամայական էին: Ուստի *ֆազային տարածության ցանկացած* x *կետի և կառավարման տիրույթի ցանկացած* u *կետի համար*՝

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \theta(x)}{\partial x_i} f_i(x,u) \le 1: \tag{7.2.4}$$

Դիցուք, այժմ, $(x(t),u(t))$-ն օպտիմալ պրոցես է, որը տեղափոխում է օբյեկտը $x^0 = x(t_0)$ կետից $x^1 = x(t_1)$ կետ, այսինքն t_0 պահին օբյեկտը գտնվում է $x(t_0)$ ֆազային կետում և ծախսելով $T(x^0)$ ժամանակ, t_1 պահին հասնում է x^1 կետ: Այստեղից՝ $t_1 = t_0 + T(x^0)$, ընդ որում ավելի արագ հասնել x^1 կետ հնարավոր չէ: Դիցուք t-ն, $t_0 \le t < t_1$ որևէ միջանկյալ պահ է: Շարժումը օպտիմալ $(x(t),u(t))$ պրոցեսի դեպքում ֆազային $x^0 = x(t_0)$ կետից մինչև $x(t)$ կետ տևում է $t - t_0$ ժամանակ, իսկ $x(t)$–ից մինչև $x^1 = x(t_1)$ կետ՝ $T(x(t))$ ժամանակ: Ավելի արագ $x(t)$ կետից հասնել $x^1 = x(t_1)$ կետ անհնար է. դա կհակասեր $(x(t),u(t))$ պրոցեսի օպտիմալությանը: Այսպիսով,

$$T(x(t_0)) = (t - t_0) + T(x(t)):$$

Այստեղ, փոխարինելով $T(x)$-ը $-\theta(x)$-ով, կստանանք՝

$$\frac{\theta(x(t)) - \theta(x(t_0))}{t - t_0} = 1:$$

Անցնելով սահմանին, երբ $t \to t_0$, ստանում ենք՝

$$\left. \frac{d}{dt} \theta(x(t)) \right|_{t=t_0} = 1$$

և, ինչպես և վերևում, կստանանք՝

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \theta(x(t))}{\partial x_i} f_i(x(t),u(t)) = 1: \tag{7.2.5}$$

Հարմարության համար նշանակենք՝

$$B(x,u)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\theta(x)}{\partial x_i}f_i(x,u) \qquad (7.2.6)$$

Այժմ, համեմատելով (17.4) և (17.5) առնչությունները, կարելի է ձևակերպել հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 7.2.1: *Եթե ֆիքսված x^1 վերջնական դիրքով, շարժման $\dot{x}=f(x,u)$ հավասարումներով և U կառավարման տիրույթով արագագործության խնդրում բավարարվում են 1 և 2 ենթադրությունները, ապա՝*

1. $B(x,u)\le 1$ *բոլոր* $x\ne x^1$ *կետերի և* u *կառավարումների համար,*
2. $B(x(t),u(t))\equiv 1$ *ցանկացած օպտիմալ* $(u(t),x(t))$ *պրոցեսի համար:*

Դիցուք, այժմ, $(u(t),x(t))$-ն, $t_0\le t<t_1$, օպտիմալ կառավարվող պրոցես է: Ֆիքսենք որևէ $t\in[t_0,t_1)$: Մեր ենթադրությունների համաձայն գոյություն ունեն $B(x,u)$ ֆունկցիայի անընդհատ մասնակի ածանցյալները ըստ $x_1,x_2,...,x_n$, ընդ որում վերը նշված թեորեմից հետևում է, որ մասնակի ածանցյալները հավասար են զրոի: Ածանցենք $B(x,u)$ ֆունկցիան՝

$$\frac{\partial B(x,u(t))}{\partial x_k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\theta(x)}{\partial x_i\partial x_k}f_i(x,u(t))+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\theta(x)}{\partial x_i}\frac{\partial f_i(x,u(t))}{\partial x_k}=0\ ,\ k=1,2,...,n: \qquad (7.2.7)$$

Քանի որ՝

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\theta(x(t))}{\partial x_k}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\theta(x)}{\partial x_k\partial x_i}\dot{x}_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\theta(x)}{\partial x_k\partial x_i}f_i(x(t),u(t)): \qquad (7.2.8)$$

Ուստի (7.2.7) հավասարումը կստանա հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\theta(x(t))}{\partial x_k}\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\theta(x)}{\partial x_i}\frac{\partial f_i(x,u(t))}{\partial x_k}=0\quad k=1,2,...,n: \qquad (7.2.7^*)$$

Նկատենք, որ նախորդ (7.2.4) – (7.2.7*) բանաձևերում $\theta(x)$ ֆունկցիան չի մտնում, մտնում են միայն դրա մասնակի ածանցյալները: Հարմարության համար նշանակենք՝

$$\psi_1(t)=\frac{\partial\theta(x(t))}{\partial x_1},\psi_2(t)=\frac{\partial\theta(x(t))}{\partial x_2},...,\psi_n(t)=\frac{\partial\theta(x(t))}{\partial x_n}:$$

Այս նշանակումներով (7.2.6)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$B(x,u)=\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)\,f_i(x,u),$$

իսկ (7.2.7*) հավասարումները՝

$$\dot{\psi}_k(t)+\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)\frac{\partial f_i(x,u(t))}{\partial x_k}=0\,,\quad k=1,2,...,n:$$

Կամ՝

$$\dot{\psi}_k(t)=-\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)\frac{\partial f_i(x,u(t))}{\partial x_k},\qquad k=1,2,...,n: \tag{7.2.9}$$

Հարմարության համար ներմուծենք՝ $2n+m$ փոփոխականի ֆունկցիա՝

$$H(\psi_1,\psi_2,...\psi_n;x_1,x_2,...,x_n;u_1,u_2,...,u_m)=\sum_{i=1}^{n}\psi_i\,f_i(x,u): \tag{7.2.10}$$

Այս ֆունկցիայի օգնությամբ (7.2.9) հավասարումները կընդունեն հետևյալ տեսքը՝

$$\dot{\psi}_k=-\frac{\partial H}{\partial x_k},\quad k=1,2,...,n: \tag{7.2.11}$$

Ամփոփելով վերընշված ոչ խիստ դատողությունները, կարելի է ձևակերպել օպտիմալ կառավարման արագագործության խնդրի լուծման հետևյալ սկզբունքը:

Մաքսիմումի սկզբունք: *Եթե կառավարվող պրոցեսը օպտիմալ է, ապա գոյություն ունի (7.2.9) համակարգի այնպիսի* $\psi_1, \psi_2, ...\psi_n$ *ոչ տրիվիալ լուծում, որ ցանկացած* $t_0 \le t < t_1$ *համար՝*

$$H\left(\psi(t), x(t), u(t)\right) = \max_{u \in U} H\left(\psi(t), x(t), u\right), \tag{7.2.12}$$

$$\dot{x} = f\left(x(t), u(t)\right):$$

Չնայած այն հանգամանքի, որ այս սկզբունքը ստացվել է դժվար ստուգվող ենթադրությունների դեպքում և չի կարող համարվել օպտիմալ պրոցեսի գոյության անհրաժեշտ պայման, սակայն պարզվում է, որ այս սկզբունքը գործում է նաև առանց որևէ ենթադրությունների $\theta(x)$ ֆունկցիայի վերաբերյալ: Անցնենք այդ սկզբունքի խիստ ապացուցմանը մասնավոր՝ գծային խնդրի դեպքում: Ընդհանուր դեպքի ապացույցը բավականաչափ բարդ է և կարելի է գտնել [7]-ում:

Արագագործության գծային խնդիր: Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը: Դիցուք օպտիմալ կառավարման շարժման հավասարումները գծային են՝

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{k=1}^{m} b_{ik} u_k \; ; \;\; i = 1, 2, ..., n, \tag{7.2.13}$$

որտեղ a_{ij} և b_{kj} գործակիցները հաստատուններ են: Նույնիսկ ամենապարզ խնդիրներում օպտիմալ կառավարումը կարող է անընդհատ չլինել: Այդ պատճառով հարկավոր է ընդլայնել դիտարկվող կառավարումների դասը:

Սահմանում 7.2.1: $u(t) = \left(u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t)\right)$ կառավարումը անվանում են *թույլատրելի կառավարում,* եթե $u_k(t)$, $k = 1, 2, ..., m$ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը ունի ոչ ավելի, քան վերջավոր թվով առաջին կարգի խզման կետեր (գոյություն ունեն աջից և ձախից վերջավոր սահմաններ), անընդհատ է աջից և անընդհատ է որոշման տիրույթի ծայրակետերում:

Եթե (7.2.13) հավասարումների $a_{ij}, i = 1, 2, ..., n, j = 1, 2, ..., n$ գործակիցների մատրիցը նշանակենք A–ով, $b_{ik}, i = 1, 2, ..., n, k = 1, 2, ..., m$ գործակիցների մատրիցը՝ B-ով, ապա (7.2.13) հավասարումները կարող ենք գրել վեկտորական տեսքով՝

$$\dot{x} = Ax + Bu \ : \tag{7.2.14}$$

Տրված $u(t)$ կառավարման համար հետագծի գոյության հարցը հանգեցնում է (17.13) համակարգի լուծման գոյությանը: Ինչպես հայտնի է (տես, օրինակ, [7]), համակարգի *լուծումը* սահմանվում է, որպես $a < t < b$ միջակայքի վրա որոշված $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ածանցելի ֆունկցիաների համակարգ, որոնք տեղադրելով (7.2.13) համակարգի մեջ, այդ համակարգի յուրաքանչյուր հավասարումը դարձնում են նույնություն:

Բերենք գոյության մի թեորեմ, որի ապացույցը կարելի է գտնել [7] ում:

Թեորեմ 7.2.2: Եթե $u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t)$ ֆունկցիաները որոշված և անընդհատ են $a < t < b$ միջակայքի վրա, ունեն վերջավոր սահմաններ $t \to a$ և $t \to b$ դեպքում, ապա, ինչպիսին էլ լինեն փազային $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$ կետերը, գոյություն ունեն $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ ֆունկցիաներ, որոնք որոշված և անընդհատ են ամբողջ $a \le t \le b$ հատվածի վրա, հանդիսանում են (7.2.13) համակարգի լուծում և, բացի այդ, բավարարված են

$$x_1(a) = x_1^0 \ , x_2(a) = x_2^0 \ , ..., \ x_n(a) = x_n^0 \tag{7.2.15}$$

պայմանները: Այս պայմաններով $x_i(t), \quad i = 1, 2, ..., n$ ֆունկցիաները որոշվում են միարժեքորեն:

Օգտվելով այս թեորեմից, կարելի է լուծում ստանալ նաև թույլատրելի կառավարումների դեպքում: Իրոք, դիցուք թույլատրելի կառավարումը կամայական $u(t) = (u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t))$ վեկտոր-ֆունկցիան է, որոշված $t_0 \le t \le t_1$ հատվածի վրա և $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$-ն որևէ փազային կետ է: Նշանակենք $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_l$ բոլոր այն կետերը, որտեղ $u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t)$ ֆունկցիաներից առնվազն մեկը խզում ունի: Դիցուք այս կետերը համարակալված են աճման կարգով՝ $\tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_l$: Տեղադրելով $u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t)$ ֆունկցիաները (7.2.10) հավասարման մեջ, կունենանք՝

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) + \sum_{k=1}^{m} b_{ik} u_k(t) \ , \quad i = 1, 2, ..., n \tag{7.2.16}$$

կամ, վեկտորական տեսքով՝

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t): \tag{7.2.16*}$$

Նախ (7.2.16) համակարգը դիտարկենք $[t_0, \tau_1]$ հատվածում: Այս հատվածի վրա (7.2.13) համակարգը բավարարում է 7.2.2 թեորեմի պայմաններին, ուստի գոյություն ունեն $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ ֆունկցիաներ, որոնք որոշված են և անընդհատ $t_0 \le t \le \tau_1$ հատվածի վրա, բավարարում են սկզբնական (17.15) պայմաններին և հանդիսանում են (7.2.16) համակարգի լուծում $t_0 < t < \tau_1$ վրա:

Այժմ կարող ենք (7.2.16) համակարգը դիտարկել $[\tau_1, \tau_2]$ հատվածի վրա, վերցնելով $x(\tau_1) = (x_1(\tau_1), x_2(\tau_1), ..., x_n(\tau_1))$ կետը որպես սկզբնական դիրք: $[\tau_1, \tau_2]$ հատվածի վրա նորից կարող ենք կիրառել 7.2.2 թեորեմը՝ գոյություն ունի լուծում $x(\tau_1)$ սկզբնական դիրքով: Այս լուծումը նույնպես նշանակենք $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$: Այժմ $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ ֆունկցիաները կառուցված են $t_0 < t < \tau_2$ հատվածի վրա, անընդհատ են այդ հատվածի վրա, ներառյալ τ_1 կետը և բավարարում են (7.2.15) սկզբնական պայմաններին: Շարունակելով այս գործընթացը, վերջ ի վերջո կկառուցենք $x(t)$ ֆունկցիան ամբողջ հատվածի վրա: Ստացված $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ ֆունկցիաները անընդհատ են $[t_0, t_1]$ հատվածի վրա և կտոր առ կտոր ածանցելի (կարող են խզվել միայն $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_l$ կետերում): Այսպես կառուցված $x(t)$ ֆունկցիան կանվանենք (7.2.16) համակարգի՝ $u(t)$ կառավարմանը համապատասխանող լուծում: Կասենք, որ $u(t)$ կառավարումը տեղափոխում է ֆազային կետը x^0 դիրքից x^1 դիրք, եթե նրան համապատասխանող $x(t)$ լուծման համար $x(t_0) = x^0$, $x(t_1) = x^1$:

Այժմ անցնենք մաքսիմումի սկզբունքի ապացուցմանը արագագործության գծային խնդրում: Ենթադրենք, որ կառավարման U տիրույթը ուռուցիկ բազմանիստ է, պարունակում է սկզբնակետը, սակայն սկզբնակետը U –ի ծայրակետ չէ: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ վերջնական ֆազային x^1 դիրքը սկզբնակետն է: Այսպիսով, դիտարկում ենք հետևյալ խնդիրը՝ կառավարվող օբյեկտը, որի շարժումը նկարագրվում է (7.2.16) հավասարումներով, հարկավոր է, ընտրելով յուրաքանչյուր վայրկյանին որևէ $u \in U$ կառավարում, R^n ֆազային տարածության ցանկացած x դիրքից մինիմալ ժամանակում բերել սկզբնակետ:

Սահմանում 7.2.2: Դիցուք T-ն որևէ դրական թիվ է: V_T-ով նշանակենք ֆազային տարածության բոլոր այն կետերի բազմությունը, որտեղից կարելի է տեղափոխվել սկզբնակետ T ժամանակամիջոցում, կամ ավելի արագ, շարժվելով որևէ թույլատրելի կառավարմամբ: V_T բազմությունը անվանում են T*-ին համապատասխանող հասանելիության տիրույթ*:

Լեմ 7.2.1: V_T հասանելիության տիրույթը ուռուցիկ բազմություն է:

Ապացույց: Դիցուք x^0-ն V_T բազմության կամայական կետ է, $u(t)$-ն թույլատրելի կառավարում է, որը տեղափոխում է այդ կետը սկզբնակետ T–ն չգերազանցող t_1 ժամանակահատվածում և $x(t)$-ն $u(t)$-ին համապատասխանող հետագիծն է: Եթե $t_1 < T$, ապա կարող ենք շարունակել $u(t)$ կառավարումը և $x(t)$ հետագիծը ամբողջ $[0,T]$ հատվածի վրա, վերցնելով $x(t)\equiv 0$, $u(t)\equiv 0$, երբ $t_1 < t \le T$: Նշանակենք՝

$$\bar{x}(t)=\begin{cases}x(t),\ 0\le t\le t_1\\ 0,\quad t_1<t\le T\end{cases},\quad \bar{u}(t)=\begin{cases}u(t),\ 0\le t\le t_1\\ 0,\quad t_1<t\le T\end{cases}:$$

Այլ կերպ ասած, $(\bar{x}(t),\bar{u}(t))$ կառավարվող պրոցեսի դեպքում $x(t)$ կետը t_1 պահին հասնում է սկզբնակետ և այնտեղ կանգնում ամբողջ մնացած ժամանակի ընթացքում: Այսպիսով, եթե $x^0 \in V_T$, ապա գոյություն ունի այնպիսի թույլատրելի կառավարում, որը տեղափոխում է կետը սկզբնակետ ուղիղ T ժամանակահատվածում և, հետևաբար V_T-ն կարելի է սահմանել, որպես ֆազային կետերի այնպիսի բազմություն, որոնցից կարելի է տեղափոխվել սկզբնակետ ուղիղ T ժամանակահատվածում:

Այժմ ցույց տանք V_T բազմության ուռուցիկությունը: Դիցուք x_0'-ն և x_0''-ն V_T բազմության երկու կամայական կետեր են և $\lambda\in(0,1)$: Կազմենք $\bar{x}_0=\lambda x_0'+(1-\lambda)x_0''$ և ցույց տանք, որ $\bar{x}_0$ կետը նույնպես պատկանում է V_T–ին: Ըստ V_T բազմության սահմանման, գոյություն ունեն $(x'(t),u'(t))$ և $(x''(t),u''(t))$ թույլատրելի կառավարվող պրոցեսներ, որոշված $[0,T]$ հատվածի վրա, որոնք բավարարում են հետևյալ եզրային պայմաններին՝

$$x'(0)=x_0',\ x''(0)=x_0'',\ x'(T)=x''(T)=0: \tag{7.2.17}$$

Նշանակենք՝

$$\bar{u}(t) = \lambda u'(t) + (1-\lambda)u''(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{7.2.18}$$

$$\bar{x}(t) = \lambda x'(t) + (1-\lambda)x''(t), \quad 0 \le t \le T: \tag{7.2.19}$$

Քանի որ, ըստ ենթադրության, U կառավարման տիրույթը ուռուցիկ բազմանիստ է, ուստի (7.2.18)-ից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $0 \le t \le T$ համար $\bar{u}(t)$-ն պատկանում է U բազմությանը: Այնուհետև, $u'(t)$ և $u''(t)$ կառավարումները թույլատրելի կառավարումներ են, այսինքն ունեն ոչ ավելի, քան վերջավոր թվով խզման կետեր, հետևաբար նաև $\bar{u}(t)$-ն ունի ոչ ավելի, քան վերջավոր թվով խզման կետեր, այսինքն թույլատրելի է:

Մյուս կողմից, $x'(t)$-ն և $x''(t)$-ն համապատասխանաբար $u'(t)$ և $u''(t)$ կառավարումներին համապատասխանող հետագծերն են, ուստի $0 < t < T$ միջակայքի բոլոր կետերում, բացի խզման կետերից, բավարարում են շարժման հավասարումներին՝

$$\dot{x}'(t) = Ax'(t) + Bu'(t),$$

$$\dot{x}''(t) = Ax''(t) + Bu''(t):$$

Բազմապատկելով այս առնչություններից առաջինը λ-ով, իսկ երկրորդը՝ $(1-\lambda)$-ով, կստանանք՝

$$\dot{\bar{x}} = \lambda\dot{x}'(t) + (1-\lambda)\dot{x}''(t) = \lambda Ax'(t) + \lambda Bu'(t) + (1-\lambda)Ax''(t) + (1-\lambda)Bu''(t) =$$

$$= A\left[\lambda x'(t) + (1-\lambda)x''(t)\right] + B\left[\lambda u'(t) + (1-\lambda)u''(t)\right] = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t):$$

Այսպիսով, բոլոր $0 < t < T$ համար, բացի կառավարումների խզման կետերից, կառավարվող $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ պրոցեսը բավարարում է շարժման հավասարումներին, այսինքն՝ $\bar{x}(t)$ հետագիծը համապատասխանում է $\bar{u}(t)$ կառավարմանը:

Վերջապես ստուգենք եզրային պայմանները: (7.2.17) և (7.2.19) –ից ունենք՝

$$\bar{x}(0)=\lambda x'(0)+(1-\lambda)x''(0)=\lambda x_0'+(1-\lambda)x_0''=\bar{x}_0,$$

$$\bar{x}(T)=\lambda x'(T)+(1-\lambda)x''(T)=\lambda\cdot 0+(1-\lambda)\cdot 0=0:$$

Այսպիսով, ստացվեց, որ $\bar{u}(t)$ թույլատրելի կառավարումը տեղափոխում է ֆազային կետը $\bar{x}_0$ կետից սկզբնակետ T ժամանակում, այսինքն՝ $\bar{x}_0\in V_T$, և, հետևաբար, V_T-ն ուռուցիկ է:

Լեմ 7.2.2: Եթե x^0-ն V_T բազմության ներքին կետ է, ապա x^0-ից կարելի է հասնել սկզբնակետ ավելի արագ, քան T ժամանակահատվածում:

Ապացույց: Դիցուք x^0-ն V_T բազմության որևէ ներքին կետ: Սա նշանակում է, որ գոյություն ունի ուռուցիկ M_0 բազմանիստ, որը ամբողջությամբ ընկած է V_T բազմության մեջ: M_0 բազմանիստի ծայրակետերը նշանակենք $y^1,y^2,...,y^k$-ով: Քանի որ $y^i\in V_T, i=1,2,...,k$, ապա յուրաքանչյուր y^i-ի համար գոյություն ունի $u^i(t)$ կառավարում, որը T ժամանակահատվածում y^i կետը տեղափոխում է սկզբնակետ: Համապատասխան հետագծերը նշանակենք $y^i(t)$-ով, $i=1,2,...,k$: Այսպիսով, $y^i(0)=y^i, y^i(T)=0$: Վերցնենք կամայական $\varepsilon>0$ և նշանակենք M_ε-ով $y^1(\varepsilon),y^2(\varepsilon),...,y^k(\varepsilon)$ կետերի ուռուցիկ թաղանթը: Բավականաչափ փոքր ε-ի դեպքում այն նորից կպարունակի x^0 կետը: $y^i(\varepsilon)$, $i=1,2,...,k$ կետից կարելի է հասնել սկզբնակետ $T-\varepsilon$ ժամանակում, շարժվելով $y^i(t)$ հետագծով: Հետևաբար, բոլոր $y^1(\varepsilon),y^2(\varepsilon),...,y^k(\varepsilon)$ կետերը պատկանում են հասանելիության $V_{T-\varepsilon}$ տիրույթին: Քանի որ $V_{T-\varepsilon}$ բազմությունը ուռուցիկ է, ուստի $V_{T-\varepsilon}$ բազմությանը կպատկանի նաև x^0 կետը: Սա էլ նշանակում է, որ x^0 կետից կարելի է հասնել սկզբնակետ $T-\varepsilon<T$ ժամանակում:

Արագագործության գծային խնդրի համար (7.2.9)-(7.2.12) նշանակումները և առնչությունները կընդունեն ավելի պարզ տեսք՝

$$H=\sum_{i=1}^{n}\psi_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+\sum_{k=1}^{m}b_{ik}u_k\right)=\sum_{i=1}^{n}\psi_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+\sum_{i=1}^{n}\psi_i\sum_{k=1}^{m}b_{ik}u_k=\langle\psi,Ax\rangle+\langle\psi,Bu\rangle \tag{7.2.20}$$

և, քանի որ առաջին գումարելին չի պարունակում u-ն, ապա՝

$$H\left(\psi(t),x(t),u(t)\right)=\max_{u\in U}H\left(\psi(t),x(t),u\right)=\max_{u\in U}\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)\sum_{k=1}^{m}b_{ik}u_k=\max_{u\in U}\langle\psi,Bu\rangle: \quad (7.2.21)$$

Օժանդակ $\psi_1,\psi_2,...,\psi_n$ ֆունկցիաների համար կունենանք՝

$$\frac{\partial H}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\psi_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+\sum_{i=1}^{n}\psi_i\sum_{k=1}^{m}b_{ik}u_k\right)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\psi_i\ , \quad j=1,2,...,n,$$

հետևաբար,

$$\dot{\psi}_j=-\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\psi_i\ , \quad j=1,2,...,n \quad (7.2.22)$$

կամ՝

$$\dot{\psi}=-A^T\psi:$$

Լեմ 7.2.3: Դիցուք $u(t)=\left(u_1(t),u_2(t),...,u_m(t)\right)$-ն կամայական թույլատրելի կառավարում է, որոշված $t_0\le t\le t_1$ հատվածի վրա, $x(t)=\left(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)\right)$-ն (17.10) հավասարման համապատասխան լուծումն է, որը սկսվում է որևէ x^0 կետից, իսկ $\psi(t)=\left(\psi_1(t),\psi_2(t),...,\psi_n(t)\right)$ ֆունկցիաները (7.2.9) հավասարումների համակարգի կամայական ոչ տրիվիալ լուծումն է: Այդ դեպքում՝

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t),x(t)\rangle=\langle\psi(t),Bu(t)\rangle \quad (7.2.23)$$

$u(t)$ կառավարման անընդհատության բոլոր կետերում (այն կետերում, որտեղ բոլոր $u_1(t),u_2(t),...,u_m(t)$ ֆունկցիաները անընդհատ են) և, հետևաբար,

$$\langle\psi(t_1),x(t_1)\rangle-\langle\psi(t_0),x(t_0)\rangle=\int_{t_0}^{t_1}\langle\psi(\tau),Bu(\tau)\rangle d\tau: \quad (7.2.24)$$

Ապացույց: $u_1(t),u_2(t),...,u_m(t)$ կառավարումների անընդհատության կետերում՝

$$\frac{d}{dt}\left\langle \psi(t), x(t)\right\rangle = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)x_i(t)\right) = \sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)\dot{x}_i(t) + \sum_{i=1}^{n}\dot{\psi}_i(t)x_i(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j + \sum_{k=1}^{m}b_{ik}u_k\right)\psi_i(t) + \sum_{i=1}^{n}x_i(t)\left(-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\psi_j(t)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}b_{ik}u_k\right)\psi_i(t) = \left\langle \psi(t), Bu(t)\right\rangle :$$

Քանի որ $\left\langle \psi(t), x(t)\right\rangle$ սկալյար արտադրյալը անընհատ ֆունկցիա է և ունի ածանցյալներ ամենուրեք, բացի վերջավոր թվով կետերից, ուստի՝

$$\psi(t_1)x(t_1) - \psi(t_0)x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left\langle \psi(\tau), x(\tau)\right\rangle d\tau = \int_{t_0}^{t_1}\left\langle \psi(\tau)Bu(\tau)\right\rangle d\tau :$$

Հետևանք: Դիցուք $x(t) = \left(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\right)$ ֆունկցիաները

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \quad i = 1, 2, ..., n$$

համասեռ համակարգի լուծումն է, իսկ $\psi(t) = \left(\psi_1(t), \psi_2(t), ..., \psi_n(t)\right)$ ֆունկցիաները՝ (7.2.22) համակարգի լուծումն է: Այդ դեպքում $\left\langle \psi(t), x(t)\right\rangle$ սկալյար արտադրյալը հաստատուն է:

Իրոք, $x(t)$-ն (7.2.10) համակարգի լուծումն է $u(t) \equiv 0$ կառավարման դեպքում: Հետևաբար՝

$$\frac{d}{dt}\left\langle \psi(t), x(t)\right\rangle = 0, \quad \text{այսինքն՝} \qquad \left\langle \psi(t), x(t)\right\rangle = const :$$

Թեորեմ 7.2.3 *(Մաքսիմումի սկզբունք): Դիցուք արագագործության գծային խնդրում $\left(u(t), x(t)\right)$–ն օպտիմալ պրոցես է, որը մինիմալ ժամանակում տեղափոխում է x^0 ֆազային կետը սկզբնակետ: Այդ դեպքում գոյություն ունի (7.2.22) համակարգի* *այնպիսի ոչ տրիվիալ $\psi(t)$ լուծում, որ ժամանակի ցանկացած պահին $u(t)$ կառավարումը բավարարվում է մաքսիմումի պայմանին՝*

$$H\left(\psi(t),x(t),u(t)\right)=\max_{u\in U}H\left(\psi(t),x(t),u\right)=\max_{u\in U}\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)\sum_{k=1}^{m}b_{ik}u_k=\max_{u\in U}\langle\psi,Bu\rangle:$$

Ապացույց: Դիցուք $\left(x(t),u(t)\right)$-ն օպտիմալ պրոցես է, որը տեղափոխում է օբյեկտը x^0 ֆազային կետից սկզբնակետ $T=t_1-t_0$ ժամանակում: Դիտարկենք հասանելիության V_T տիրույթը: 7.2.2 լեմից հետևում է, որ x^0 կետը V_T բազմության եզրային կետ է: Դիցուք Γ-ն x^0 կետով անցկացրած V_T բազմության որևէ հենքային հիպերհարթություն է: Նշանակենք Π-ով այն կիսատարածությունը, որը որոշվում է Γ հիպերհարթությամբ և պարունակում է V_T բազմությունը: Նշանակենք $\overline{n}$-ով հիպերհարթության նորմալ վեկտորը, որը դուրս է գալիս x^0 կետից և գտնվում է Π կիսատարածությունում: Π կիսատարածությունը բաղկացած է այն բոլոր x կետերից, որոնց համար $\left(x-x^0\right)$ վեկտորը կազմում է սուր կամ ուղիղ անկյուն $\overline{n}$ վեկտորի հետ, այսինքն որոնց համար $\left\langle\overline{n},\left(x-x^0\right)\right\rangle$ սկալյար արտադրյալը ոչ բացասական է՝

$$\left\langle\overline{n},\left(x-x^0\right)\right\rangle\geq 0: \tag{7.2.25}$$

Քանի որ V_T բազմությունը ամբողջությամբ ընկած է Π կիսատարածության մեջ, ուստի V_T բազմության ցանկացած x կետի համար այս անհավասարությունը ճիշտ է:

Սկզբնական $\psi(t_0)=\overline{n}$ պայմանով (7.2.22) հավասարման լուծումը նշանակենք $\psi(t)=\left(\psi_1(t),\psi_2(t),...,\psi_n(t)\right)$ -ով և այն դիտարկենք $t_0\leq t\leq t_1$ հատվածի վրա: Այս լուծումը տրիվիալ չէ, քանի որ $\overline{n}\neq 0$: Ցույց տանք, որ $\psi(t)$-ն այն լուծումն է, որի դեպքում $u(t)$-ն բավարարում է մաքսիմումի պայմանին: Ենթադրենք հակառակը՝ որոշակի $\tau\in[t_0,t_1]$ պահին մաքսիմումի (7.2.21) պայմանը տեղի չունի, այսինքն կգտնվի այնպիսի $v\in U$, որի համար

$$\left\langle\psi(\tau),Bu(\tau)\right\rangle<\left\langle\psi(\tau),Bv\right\rangle : \tag{7.2.26}$$

Եթե $\tau < t_1$, ապա $u(t)$ կառավարումը և, հետևաբար, $\langle \psi(t), Bu(t) \rangle$ սկալյար արտադրյալը անընդհատ է աջից τ կետում, այսինքն անընդհատ է որևէ $[\tau, \tau + h]$ հատվածի վրա: Անընդհատությունից հետևում է, որ այդ հատվածի վրա տեղի ունի (7.2.26) անհավասարությունը:

Եթե $\tau = t_1$, ապա $u(t)$ կառավարումը և, հետևաբար, $\langle \psi(t), Bu(t) \rangle$ սկալյար արտադրյալը անընդհատ է ձախից τ կետում, այսինքն անընդհատ է որևէ $[\tau - h, \tau]$ հատվածի վրա: Անընդհատությունից հետևում է, որ այդ հատվածի վրա տեղի ունի (7.2.26) անհավասարությունը: Բոլոր դեպքերում ստանում ենք, որ գոյություն ունի այնպիսի $[\tau_1, \tau_2]$ հատված, որ բոլոր $t \in [\tau_1, \tau_2]$ համար՝

$$\langle \psi(t), Bu(t) \rangle < \langle \psi(t), Bv \rangle$$

Այժմ սահմանենք $\bar{u}(t)$ կառավարում $[t_0, t_1]$ հատվածի վրա հետևյալ կերպ՝ $\bar{u}(t) = v$, եթե $t \in [\tau_1, \tau_2)$ և հավասար է $u(t)$ $[t_0, t_1]$ հատվածի մյուս կետերում: $\bar{x}(t)$-ով նշանակենք $\bar{u}(t)$ կառավարմանը համապասխանող հետագիծը $\bar{x}(t_1) = 0$ վերջնական պայմանով: Այս հետագիծը դիտարկենք $[t_0, t_1]$ հատվածի վրա և սկզբնական կետը նշանակենք $\bar{x}^0$-ով ($\bar{x}(t_0) = \bar{x}^0$): Այսպիսով, $\bar{x}^0$ կետից կարելի է տեղափոխվել սկզբնակետ $T = t_1 - t_0$ ժամանակում կիրառելով $\bar{u}(t)$ կառավարումը: Ուստի $\bar{x}^0$ կետը պատկանում է V_T հասանելիության տիրույթին և ըստ (7.2.25)-ի՝

$$\langle \bar{n}, (\bar{x}^0 - x^0) \rangle \geq 0:$$

Կիրառենք լեմ 7.2.3-ը $\psi(t), x(t), u(t)$ ֆունկցիաների նկատմամբ $[t_0, t_1]$ հատվածի վրա՝

$$\langle \psi(t_1), x(t_1) \rangle - \langle \psi(t_0), x(t_0) \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle \psi(\tau), Bu(\tau) \rangle d\tau:$$

Նմանապես՝

$$\langle \psi(t_1), \bar{x}(t_1) \rangle - \langle \psi(t_0), \bar{x}(t_0) \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle \psi(\tau), B\bar{u}(\tau) \rangle d\tau:$$

Հանելով երկրորդ հավասարությունը առաջինից և նկատելով, որ $x(t_1)=\overline{x}(t_1)=0$, ստանում ենք՝

$$\left\langle \psi(t_0),\left(\overline{x}(t_0)-x(t_0)\right)\right\rangle=\int_{t_0}^{t_1}\left(\left\langle \psi(\tau),Bu(\tau)\right\rangle-\left\langle \psi(\tau),B\overline{u}(\tau)\right\rangle\right)d\tau:$$

Այս հավասարության ձախ մասը հավասար է $\left\langle \overline{n},\left(\overline{x}^0-x^0\right)\right\rangle$, իսկ աջ մասում $[\tau_1,\tau_2]$ հատվածի վրա $\overline{u}(t)=v$, իսկ այս հատվածից դուրս $\overline{u}(t)=u(t)$, հետևաբար ենթաինտեգրալային ֆունկցիան հավասար է 0-ի: Այսպիսով կստանանք՝

$$\left\langle \overline{n},\left(\overline{x}^0-x^0\right)\right\rangle=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left(\left\langle \psi(\tau),Bu(\tau)\right\rangle-\left\langle \psi(\tau),Bv\right\rangle\right)d\tau:$$

Քանի որ աջ մասում ենթաինտեգրալային ֆունկցիան ըստ (7.2.26)-ի խիստ բացասական է, ուստի՝

$$\left\langle \overline{n},\left(\overline{x}^0-x^0\right)\right\rangle<0$$

Սա հակասում է (7.2.25) անհավասարությանը: Այս հակասությունը ապացուցում է, որ մաքսիմումի պայմանը բավարարվում է բոլոր $t\in[t_0,t_1]$ համար:

Օրինակ: Որպես արագագործության գծային խնդրի օրինակ դիտարկենք սույն բաժնի սկզբում դիտարկված մեքենայի ուղղագիծ շարժման օրինակը, ենթադրելով, որ շփման ուժը բացակայում է, իսկ զանգվածը հավասար է 1-ի: Այս խնդրի շարժման հավասարումները կընդունեն հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=u:\end{cases}\quad ,\ |u|\le 1\ ,\ \ x_1(t_1)=0,x_2(t_1)=0:$$

Կառուցենք H ֆունկցիան՝

$$H(\psi,x,u)=\psi_1x_2+\psi_2u:$$

Հեշտ է տեսնել, որ H ֆունկցիայի մաքսիմումը կախված է u-ի գործակցի նշանից՝ եթե t պահին $\psi_2(t)>0$, ապա H ֆունկցիան կունենա մաքսիմում $u=1$

կառավարման դեպքում, իսկ եթե $\psi_2(t)<0$, ապա մաքսիմում կստանանք, երբ $u=-1$:
Այնուհետև, օգտվելով (7.2.9) բանաձևերից, օժանդակ $\psi_1(t),\psi_2(t)$ ֆունկցիաների համար ստանում ենք հետևյալ հավասարումները՝

$$\begin{cases}\dot{\psi}_1=0,\\ \dot{\psi}_2=-\psi_1:\end{cases}$$

որտեղից՝

$$\psi_1(t)=c_1,\psi_2(t)=c_1t+c_2,$$

որտեղ c_1,c_2-ը ինտեգրման հաստատուններն են: Այսպիսով, $\psi_2(t)$ ֆունկցիան, լինելով գծային ֆունկցիա, նշանը կարող է փոխել ոչ ավելի քան մեկ անգամ, հետևաբար օպտիմալ կառավարումը ունի ոչ ավելի, քան մեկ խզման կետ $[t_0,t_1]$ հատվածի վրա:

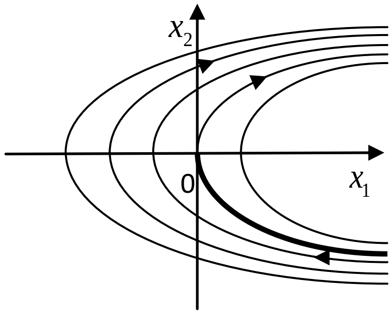
Ժամանակի այն հատվածում, որտեղ $u\equiv1$, շարժման հետագծի համար կստանանք հետևյալ հավասարումները՝

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=1:\end{cases}$$

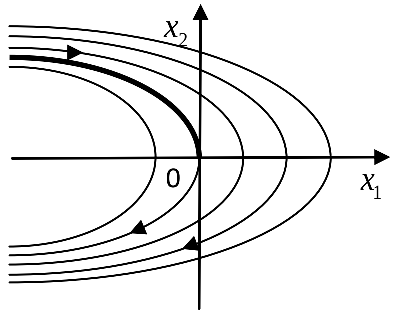
Որտեղից՝

$$x_1=\frac{1}{2}x_2^2+c:$$

Ստանում ենք պարաբոլների ընտանիք, կախված c հաստատունից: Այսպիսով, հետագծի այն կտորը, որը համապատասխանում է $u\equiv1$ կառավարմանը, իրենից ներկայացնում է պարաբոլի աղեղ: Քանի որ $\dot{x}_2=1>0$, հետևաբար շարժումը այս պարաբոլներով կատարվում է ներքևից վերև (տես նկ. 7.2.1), ընդ որում այս ընտանիքի միայն մեկ պարաբոլն է անցնում սկզբնակետով :



Նկ.7.2.1



Նկ.7.2.2

Այն հատվածում, որտեղ $u \equiv -1$, շարժման հավասարումները կստանան հետևյալ տեսքը՝

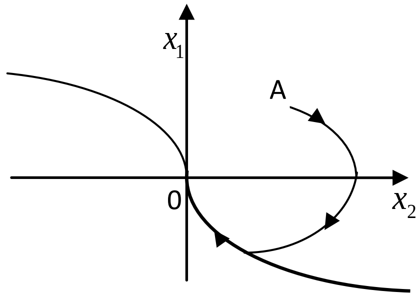
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -1: \end{cases}$$

և հետագծի համար կստանանք՝

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + c$$

Նորից ստանում ենք պարաբոլների ընտանիք, սակայն ողղված հակառակ կողմաղեղ, սակայն ողղված հակառակ կողմ: Այս պարաբոլներով շարժումը կկատարվի վերից վար, քանի որ $\ddot{x}_2 = -1 < 0$ (տես նկ.7.2.2), ընդ որում և այս ընտանիքի միայն մեկ պարաբոլն է անցնում սկզբնակետով :

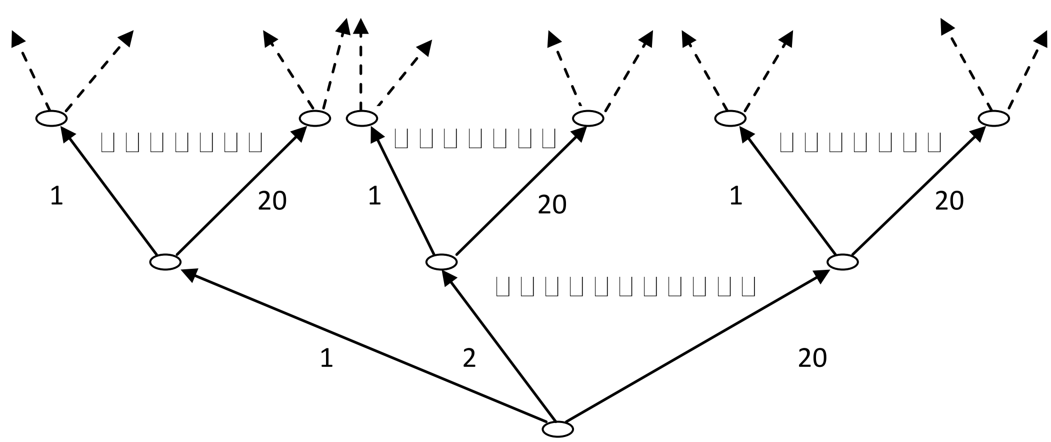
Այսպիսով, հետագիծը կունենա հետևյալ տեսքը. կախված այն բանից, թե որ քառորդում է սկզբնական դիրքը, կետը կշաժվի մեկ պարաբոլով, այնուհետև, փոխելով կառավարումը $u \equiv 1$-ից $u \equiv -1$, կամ հակառակը, կանցնի մյուս պարաբոլի վրա և կհասնի սկզբնակետ:Նկար 7.2.3-ում պատկերված է A սկզբնական դիրքից ֆազային կետի օպտիմալ հետագծի մի օրինակ:



Նկ.7.2.3

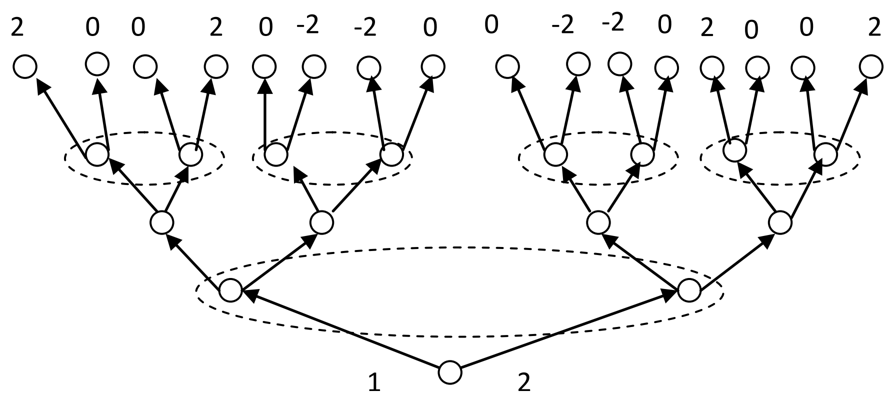
7.3. ԴԻՐՔԱՅԻՆ ԽԱՂԵՐ

Դիրքային խաղերը *n* խաղացողի այն խաղերն են, որտեղ որոշումներն ընդունվում են ժամանակի ընթացքում՝ քայլ առ քայլ: Դիտարկենք մի օրինակ՝ բոլորին հայտնի շախմատային խաղը: Ինչպես հայտնի է, այս խաղում երկու խաղացող կա՝ սպիտակները և սևերը: Խաղն սկսվում է սկզբնական դիրքից՝ խաղատախտակի վրա ֆիգուրների սկզբնական դասավորությունից: Այս դիրքին կարելի է համապատասխանեցնել մի կետ հարթության վրա: Առաջին քայլը կատարում են սպիտակները՝ ընտրելով 20 հնարավոր քայլերից մեկը: Հնարավոր այս քայլերից յուրաքանչյուրի ընտրության դեպքում խաղատախտակի վրա ստանում ենք նոր դիրք՝ 20 հնարավոր դիրքերից մեկը, որը նույնպես կարելի է նշել կետով հարթության վրա: Ցույց տալու համար, որ այս դիրքերը կարելի է «ընկնել» սկզբնական դիրքից, յուրաքանչյուր դիրքը սկզբնականի հետ միացնենք սլաքով: Հաջորդ քայլը սևերինն է: Նրանք նույնպես ունեն 20 հնարավոր ընտրություն ստացված 20 դիրքերից յուրաքանչյուրում: Հետևաբար, սևերի առաջին քայլից հետո կարող է ստեղծվել 400 դիրք: Այս պրոցեսը շարունակելով, հարթության վրա կստանանք կետերի և սլաքների բազմություն (տես նկ.7.3.1): Այն դիրքերին, որտեղ խաղն ավարտվում է (օրինակ մատային կամ պատային դիրքերում) համապատասխանում են դիրքեր, որոնցից սլաք չի դուրս գալիս (վերջնական դիրքեր): Յուրաքանչյուր վերջնական դիրքին համապատասխանեցնենք 1, -1, կամ 0 թվեր, կախված նրանից, սպիտակները հաղթել են այդ դիրքում, պարտվել են, թե խաղն ավարտվել է ոչ-ոքի:



Նկար 7.3.1

Նշանակենք բոլոր դիրքերի բազմությունը X-ով, սլաքների բազմությունը՝ E-ով, վերջնական դիրքերի բազմությունը՝ X^*-ով: Այս նշանակումներով շախմատի մոդելը կարելի է ներկայացնել $\Gamma = \langle X, E \rangle$ զույգով և $H : X^* \to \{-1, 0, +1\}$ շահույթի ֆունկցիայով: Ինչպես հայտնի է, $\langle X, E \rangle$ զույգը կոչվում է *գրաֆ* և, մասնավորապես, կառուցված գրաֆը միակապ, կողմնորոշված, ացիկլիկ գրաֆ է, որն անվանում են *ծառ*, իսկ սկզբնական դիրքը՝ *ծառի արմատ*: Ընդհանուր դեպքում կարող են լինել երկուսից ավելի խաղացողներ: Բացի այդ, քանի որ որոշումները ընդունվում են ժամանակի ընթացքում, ապա որոշումները ընդունելիս առաջանում է նաև նախորդ քայլերում ընդունված որոշումների վերաբերյալ տեղեկատվության քանակի և կառուցվածքի հարցը: Դիրքային խաղերում այս տեսակի հարցերը ընդունված է լուծել ինֆորմացիոն բազմությունների հասկացության միջոցով: Կոպիտ ասած, քայլ կատարելիս խաղացողը կարող է իմանալ ոչ թե կոնկրետ դիրքը, այլ միայն դիրքերի որ բազմությունում է գտնվում: Նկար 7.3.2-ում բերված է երկու քայլանի "գիր-դուշ" խաղի ծառը:



Նկար 7.3.2

Այժմ տանք դիրքային խաղի ընդհանուր սահմանումը:

Սահմանում 7.3.1: n-խաղացողի G խաղը որոշվում է.

1. Խաղի $\langle X, E \rangle$ ծառով,
2. Խաղացողների $I = \{1, 2, ..., n\}$ բազմությամբ,
3. $X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_m \cup X^*$ տրոհումով ըստ քայլերի, $X_1 = \{x_1\}$,
4. $X \setminus X^* = \bigcup_{i \in I} X^i$ տրոհումով ըստ խաղացողների,

5. $X^i \bigcap X_j = \bigcup_{l=1}^{k_{ij}} u_l^{ij}$, $i \in I$ ինֆորմացիոն տրոհումներով,

6. $h_i : X^* \to (-\infty, +\infty)$, $i \in I$ շահույթի ֆունկցիաներով:

Դիրքային խաղը խաղացվում է հետևյալ կերպ: Նշանակենք E_x-ով սլաքների բազմությունը, որը դուրս է գալիս x դիրքից: Սլաքները անվանում են *այլընտրանքներ*: Դիցուք սկզբնական x_1 դիրքը պատկանում է X^{j_0} բազմությանը: Սա նշանակում է, որ սկզբնական դիրքում քայլի իրավունքը j_0 խաղացողինն է՝ նա ընտրում է որևէ $e = (x_1, x_2) \in E_{x_1}$: Եթե $x_2 \in u_l^{2j_1} \subseteq X^{j_1}$, ապա քայլը j_1-րդ խաղացողինն է և նա ընտրում որևէ $e = (x_2, x_3) \in E_{x_2}$: Այստեղ ենթադրվում է, որ յուրաքանչյուր ինֆորմացիոն բազմության x դիրքերի համար E_x բազմությունները համընկնում են: Այս պրոցեսը շարունակվում է այնքան ժամանակ, մինչև խաղը տեղափոխվի որևէ $x \in X^*$: Այստեղ խաղն ավարտվում է և յուրաքանչյուր խաղացող ստանում է իր շահույթի ֆունկցիայի արժեքը $x \in X^*$ կետում:

Սահմանում 7.3.2. Խաղացողի *մաքուր ստրատեգիա* G խաղում անվանում են ցանկացած արտապատկերում, որը խաղացողի յուրաքանչյուր ինֆորմացիոն բազմությանը համապատասխանության մեջ է դնում այդ բազմությունից դուրս եկող որևէ այլընտրանք: Դժվար չէ ստուգել, որ ստրատեգիաների ցանկացած $s = (s_1, s_2, ...s_n)$ վեկտորը միարժեքորեն որոշում է որևէ $x(s) \in X^*$ վերջնական դիրք: Եթե i–րդ խաղացողի մաքուր ստրատեգիաների բազմությունը նշանակենք S_i-ով, և $H_i(s) = h_i(x(s))$, $i \in I$, ապա խաղը կարելի է ներկայացնել հետևյալ համակարգի տեսքով՝

$$\left\langle I, \{S_i\}_{i\in I}, \{H_i(s)\}_{i\in I} \right\rangle$$

որն անվանում են n-խաղացողի խաղի նորմալ տեսք (տես *5.1* բաժինը): Այս եղանակով ցանկացած վերջավոր դիրքային խաղ կարելի է բերել նորմալ տեսքի: Մասնավորապես հակամարտ դիրքային խաղերը կբերվեն մատրիցային խաղերի, որոնց լուծման գոյությունը և լուծման եղանակները դիտարկվել են *5.3* բաժնում:

Սակայն երբ ինֆորմացիոն բազմությունների թիվը աճում է, շատ արագ աճում է մաքուր ստրատեգիաների թիվը: Բացի այդ, որոշ դեպքերում դիրքային կառուցվածքը թույլ է տալիս անհամեմատ հեշտ լուծել խաղը:

Բերենք դիրքային խաղերի մի կարևոր մասնավոր դեպքի սահմանում:

Սահմանում 7.3.3. Դիրքային G խաղն անվանում են *լրիվ ինֆորմացիայով խաղ*, եթե խաղի բոլոր ինֆորմացիոն բազմությունները մեկ տարրանի բազմություններ են:

Լրիվ ինֆորմացիայով խաղի օրինակ է հանդիսանում շախմատը: Առանց ապացուցման բերենք թեորեմ լրիվ ինֆորմացիայով խաղերի վերաբերյալ (տես [18]):

Թեորեմ 7.3.1. Լրիվ ինֆորմացիայով խաղերում գոյություն ունի հավասարակշռության իրավիճակ մաքուր ստրատեգիաներում:

Դիտարկենք դիրքային խաղի մեկ այլ մոդել, որը չի օգտագործում գրաֆը, որպես մոդելի հիմք, ինչը թույլ է տալիս այն օգտագործել նաև ուսումնասիրելու անվերջ դիրքային խաղերը: Այս մոդելի հիմնական առանձնահատկությունը կայանում է նրանում, որ այն դիրքային է միայն առաջին խաղացողի համար: Մոդելը տրվում է օբյեկտների հետևյալ համակարգով.

1. $U_1, U_2, \ldots U_n$ բազմություններով, որոնց անվանում են ինֆորմացիոն տարածություններ,

2. $X_1 X_2, \ldots, X_n$ բազմություններով, որոնց անվանում են առաջին խաղացողի այլընտրանքների տարածություններ,

3. $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ բազմություններով, որոնց անվանում են հակառակորդի այլընտրանքների տարածություններ,

4. $g_i : \prod_{j=1}^{i} Z_j \times \prod_{j=1}^{i-1} X_j \to U_i, i = 1, 2, \ldots, n$ արտապատկերումներով, որոնց անվանում են ինֆորմացիոն արտապատկերումներ,

5. $H:\prod_{j=1}^{n} Z_j \times \prod_{j=1}^{n} X_j \to R$ արտապատկերումով, որն անվանում են առաջին խաղացողի շահույթի ֆունկցիա:

Խաղում են հետևյալ կերպ: Առաջին քայլում հակառակորդը ընտրում է որևէ $z_1 \in Z_1$ այլընտրանք: Արաջին խաղացողին հայտնի է դառնում $g_1(z_1) \in U_1$ արտապատկերման արժեքը և նա ընտրում է որևէ $x_1 \in X_1$ կետ: Այնուհետև հակառակորդը ընտրում է որևէ $z_2 \in Z_2$: Առաջին խաղացողին հայտնի է դառնում $g_2(z_1, z_2, x_1) \in U_2$ արտապատկերման արժեքը, և նա ընտրում է որևէ $x_2 \in X_2$: Խաղը շարունակվում է այնքան ժամանակ, մինչև ընտրվեն բոլոր $z_1,...z_n, x_1,..., x_n$ և առաջին խաղացողը ստանում է H արտապատկերման արժեքն այդ կետում, այսինքն՝ $H(z_1,...z_n, x_1,..., x_n)$: Ընդհանուր դեպքում բոլոր $U_1, U_2,...U_n;\ X_1 X_2,..., X_n$ բազմությունները ենթադրվում են չափելի տարածություններ, իսկ H և $g_i, i = 1,2,..., n$ արտապատկերումները՝ չափելի արտապատկերումներ: Սակայն, ավելորդ բարդույթներից խուսափելու համար կդիտարկենք միայն վերջավոր խաղեր:

Սահմանում 7.3.3. *Խաղացողի մաքուր ստրատեգիան* սահմանվում է որպես

$$c = (c_1, c_2,..., c_n),\ c_i : U_i \to X_i,\ i = 1,2,..., n$$

արտապատկերումների վեկտոր: *Հակառակորդի ստրատեգիան* սահմանվում է որպես $z = (z_1,..., z_n) \in \prod_{j=1}^{n} Z_j$ վեկտոր: (Այստեղ չենք տարբերում հակառակորդի մաքուր և խառն ստրատեգիաները):

Խաղացողի և հակառակորդի ստրատեգիաների յուրաքանչյուր (c, z) զույգ միարժեքորեն որոշում է $x_{c,z} = (x_1,..., x_n)$ կետ հետևյալ կերպ՝

$$x_i = c_i(g_i(z_1,...,z_i,x_1,...,x_{i-1})), i = 2,...,n$$
$$x_1 = c_1(z_1):$$

Այստեղից, ստրատեգիաների յուրաքանչյուր (c,z) զույգ միարժեքորեն որոշում է խաղացողի շահույթը՝

$$\bar{H}(c,z) = H(x_{c,z},z):$$

Խաղացողի խառն ստրատեգիան սահմանվում է հետևյալ կերպ: Դիցուք $(\Omega, \mathrm{A}, \mathrm{P})$-ն հավանականային տարածություն է: Նշանակենք՝ $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$:

Սահմանում 7.3.4. *Խաղացողի խառն ստրատեգիա* կանվանենք

$$s = \{s_u\}_{u\in U},\ \ s_u : \Omega \to X_i,\ u \in U_i\ \ i = 1,2,...,n:$$

Ֆիքսած $z \in Z = \prod_{i=1}^{n} Z_i$ դեպքում յուրաքանչյուր s խառն ստրատեգիան միարժեքորեն որոշում է $\mu_{s,z}$ հավանականային չափ $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ բազմության վրա հետևյալ կերպ: Յուրաքանչյուր (ω, z, s) եռյակի համար, որտեղ $\omega \in \Omega$, ռեկուրենտ բանաձևով սահմանենք $w(\omega, s, z) = (w_1, w_2, ..., w_n)$ վեկտոր՝

$$w_1 = s_{g_1(z_1)}(\omega),\ \ w_i = s_{g_i(z_1,...,z_i w_1,...,w_{i-1})}(\omega)\ ,\ \ i = 1,2,...,n.$$

Եվ $\mu_{s,z}$ չափը սահմանվում է որպես $w(\cdot, s, z)$ պատահական վեկտորի հավանականային բաշխում՝

$$\mu_{s,z} = \mathrm{P}w^{-1}(\cdot, s, z):$$

Սահմանում 7.3.5. Երկու՝ s' և s'' ստրատեգիաներն անվանում են *համարժեք*, եթե ցանկացած $z \in Z$ համար $\mu_{z,s'} = \mu_{z,s''}$:

Խաղի ինֆորմացիոն կառուցվածքը բնորոշվում է g_i ինֆորմացիոն արտապատկերումների հատկություններով:

Սահմանում 7.3.6. Խաղն անվանում են *լրիվ հիշողությամբ խաղ*, եթե գոյություն ունեն այնպիսի

$$\varphi_j^i : U_i \to U_j \ , \ \ j < i \ ,$$

$$\psi_j^i : U_i \to X_j \ , \ \ j < i \ ,$$

արտապատկերումներ (որոնք հայտնի են խաղացողին) որ՝

$$\varphi_j^i g_i(z_1,...,z_i,x_1,...x_{i-1}) = g_i(z_1,...,z_j,x_1,...x_{j-1}) \ ,$$

$$\psi_j^i g_i(z_1,...,z_i,x_1,...x_{i-1}) = x_j \ :$$

Սա նշանակում է, որ լրիվ հիշողությամբ խաղերում խաղացողը հիշում է, թե ինչպիսի ինֆորմացիա է նա ստացել, և ինչ ընտրություններ է կատարել նախորդ քայլերում:

Սահմանում 7.3.7. Խաղացողի խառն $s = \{s_u\}_{u \in U}$ ստրատեգիան կանվանենք *վարվելակերպի ստրատեգիա*, եթե բոլոր $s_u, u \in U$ պատահական մեծությունները միմիանցից անկախ են:

Թեորեմ 7.3.1. *Լրիվ հիշողությամբ խաղերում խաղացողի ցանկացած խառն ստրատեգիայի համար գոյություն ունի համարժեք վարվելակերպի ստրատեգիա:*

Ապացույց: Դիցուք $s=\{s_u\}_{u\in U}$ խաղացողի որևէ խառն ստրատեգիա է: Կառուցենք այս ստրատեգիային համապատասխանող վարվելակերպի ստրատեգիա: Դիցուք $u\in U, u\in U_i$, $u=g_i(z_1,z_2,...,z_i;x_1,x_2,...,x_{i-1})$: Նշանակենք՝ $u_k=g_i(z_1,z_2,...,z_k;x_1,x_2,...,x_{k-1})$, $k=1,2,...,i-1$: Քանի որ խաղը լրիվ հիշողությամբ խաղ է, ուստի՝

$$u_k=\varphi_k^i u,\ \ x_k=\phi_k^i u,\ k=1,2,...,i-1:$$

Նշանակենք՝

$$\nu_u(x_i)=P\left\{s_u=x_i\,|\,s_{u_k}=x_k,k=1,2,...,i-1\right\}=P\left\{s_u=x_i\,|\,s_{\varphi_k^i u}=\phi_k^i u,k=1,2,...,i-1\right\}:$$

Այստեղ $P(\cdot|\cdot)$-ով նշանակված են պայմանական հավանականությունները: Հավանականությունների դասընթացից հայտնի է, որ X_i բազմության վրա որոշված ցանկացած ν_u հավանականային բաշխման համար գոյություն ունի $q_u:\Omega\to X_i$ պատահական մեծություն, այնպես, որ՝ $\nu_u(x_i)=P\{q_u=x_i\}$: Ակնհայտ է, որ այսպես կառուցած $q=\{q_u\}_{u\in U}$ ստրատեգիան վարվելակերպի ստրատեգիա է:

Ցույց տանք, որ s և q ստրատեգիաները համարժեք են: Ֆիքսենք որևէ $z\in Z$ և կամայական $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ համար դիտարկենք ՝

$$\mu_{z,s}(x)=P\{w(\cdot,s,z)=x\}=P\left\{s_{g_1(z)}=x_1,s_{g_2(z,x_1)}=x_2,...,s_{g_{n-1}(z,x_1,x_2,...,x_{n-1})}=x_n\right\}:$$

Նշանակենք՝ $u_i=g_i(z,x_1,x_2,...,x_{i-1})$, $i=1,2,...,n$: Կստանանք՝

$$\mu_{z,s}(x) = P\left\{s_{u_1} = x_1, s_{u_2} = x_2, ..., s_{u_n} = x_n\right\} =$$
$$= P\left\{s_{u_n} = x_n \mid s_{u_{n-1}} = x_{n-1}, ..., s_{u_1} = x_1\right\} P\left\{s_{u_{n-1}} = x_{n-1} \mid s_{u_{n-2}} = x_{n-2}, ..., s_{u_1} = x_1\right\} \cdots P\left\{s_{u_1} = x_1\right\} =$$
$$= P\left\{s_{u_n} = x_n \mid s_{\varphi_{n-1}^n u} = \phi_{n-1}^n u_n, ..., s_{\varphi_1^n u_n} = \phi_1^n u_n\right\} P\left\{s_{u_n - 1} = x_{n-1} \mid s_{\varphi_{n-2}^n u} = \phi_{n-2}^n u_n, ..., s_{\varphi_1^n u_n} = \phi_1^n u_n\right\} \cdots P\left\{s_{\varphi_1^n u_n} = x_1\right\} =$$
$$= \nu_{u_n}(x_n)\nu_{u_{n-1}}(x_{n-1}) \cdots \nu_{u_1}(x_1) = P\left\{q_{u_n} = x_n\right\} P\left\{q_{u_{n-1}} = x_{n-1}\right\} \cdots P\left\{q_{u_1} = x_1\right\} =$$
$$= P\left\{q_{u_n} = x_n, q_{u_{n-1}} = x_{n-1}, ..., q_{u_1} = x_1\right\} = \mu_{z,q}(x):$$
Այսպիսով թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում 7.3.8. Լրիվ հիշողությամբ խաղն անվանում են *միաժամանակյա խաղ*, եթե խաղում գոյություն ունեն խաղացողին հայտնի

$$\psi_j^i : U_i \to Z_j \, , \; j < i$$

արտապատկերումներ, այնպես որ՝

$$\psi_j^i g_i(z_1, ..., z_i, x_1, ...x_{i-1}) = z_j :$$

Ներմուծենք օժանդակ խաղեր նորմալ տեսքով: Նշանակենք՝

$$G(0) = \left\langle X_1, Z_1, H_0 \right\rangle, \; G(\hat{x}_{n-1}, \hat{z}_{n-1}) = \left\langle X_n, Z_n, H_{\hat{x}_{n-1}, \hat{z}_{n-1}} \right\rangle,$$

$$G(\hat{x}_{k-1}, \hat{z}_{k-1}) = \left\langle X_k, Z_k, H_{\hat{x}_{k-1}, \hat{z}_{k-1}} \right\rangle, \;\; k = 1, 2, ..., n-1,$$

որտեղ $\tilde{H}_0(x_1, z_1) = V(G(x_1, z_1))$, $\tilde{H}_{\hat{x}_{n-1}, \hat{z}_{n-1}}(x_n, z_n) = H(x_1, x_2, ..., x_n; z_1, z_2, ..., z_n)$, $\tilde{H}_{\hat{x}_{k-1}, \hat{z}_{k-1}}(x_k, z_k) = V(G(\hat{x}_{k-1}, \hat{z}_{k-1}))$, $k = 1, 2, ..., n-1$: Այստեղ $V(G)$-ով նշանակված է G խաղի արժեքը, ցանկացած $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ վեկտորի համար նշանակել ենք $\hat{y}_k = (y_1, y_2, ..., y_k)$: Առանց ապացուցման բերենք հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 7.3.2. Միաժամանակյա խաղի լուծումը կարելի է ստանալ հաջորդաբար լուծելով $G(\hat{x}_{k-1}, \hat{z}_{k-1})$ հակամարտ խաղերը:

Օրինակ: Դիտարկենք սույն բաժնում բերված “գիր-դուշ” խաղի երկու քայլանի տարբերակը: Խաղի գրաֆը պատկերված է նկար 7.3.2-ում: Առաջին խաղացողի՝ “հակառակորդի” ստրատեգիան կունենա (z_1, z_2) տեսքը, որտեղ $z_1 \in [1,2]$, $z_2 \in [1,2]$: Այս խաղում՝

$$U_1 = \{u_1\}, U_2 = \{u_1^2, u_2^2, u_3^2, u_4^2\},$$
$$X_1 = \{1,2\}, X_2 = \{1,2\}:$$

Կառուցենք $G(1,1) = \langle Z_2, X_2, H_{1,1} \rangle$ խաղը: Այն մատրիցային խաղ է $H_{1,1}$ մատրիցով՝

$$H_{1,1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}:$$

Համանմանորեն կառուցենք $G(1,2), G(2,1), G(2,2)$ խաղերը: Համապատասխան մատրիցները կունենան հետևյալ տեսքը՝

$$H_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ H_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ H_{1,1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Հեշտությամբ կարելի է գտնել այս խաղերի արժեքները՝

$$v(G(1,1)) = -1,\ v(G(1,2)) = 1,\ v(G(2,1)) = 1,\ v(G(2,2)) = -1:$$

Այժմ կարելի է կառուցել G^0 խաղը, որի մատրիցն է՝

$$H_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}:$$

Այս խաղի և, հետևաբար, սկզբնական խաղի արժեքը հավասար է 0-ի: Իսկ խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիաները նույնն են այս բոլոր խաղերում՝ $q^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, ուստի խաղացողի օպտիմալ վարքի ստրատեգիան՝ $\eta^0 = \left(\eta_{u_1}, \eta_{u_1^2}, \eta_{u_2^2}, \eta_{u_3^2}, \eta_{u_4^2}\right)$ կընդունի հետևյալ տեսքը՝ $P\{\eta_u = x\} = \frac{1}{2}$ բոլոր $u \in U_1 \cup U_2$ և $x \in X_1 \cup X_2$ համար:

7.4: ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԽԱՂԵՐ

Այս բաժնում դիտարկվում են հակամարտ դիֆերենցիալ խաղեր, որոնք դիրքային խաղերի ընդհանրացում են, որտեղ քայլերի թիվն անվերջ է (կոնտինուում է), այսինքն առաջին և երկրորդ խաղացողները, որոնց նշանակում են E -ով և P -ով, որոշումները ընդունվում են ժամանակի յուրաքանչյուր պահին: Նախ դիտարկենք *հետապնդման խաղերը*: Դիցուք տարածության մեջ տրված են երկու՝ $x \in R^n$ և $y \in R^n$ կետեր, որոնց շարժումը կառավարում են երկու խաղացողներ, ընտրելով յուրաքանչյուր պահին համապատասխանաբար $u \in U \subseteq R^k$ և $w \in W \subseteq R^m$ կառավարումները: Այս դրվածքով, ինչպես և օպտիմալ կառավարման խնդիրներում, խաղացողների շարժման հետագծերը համապատասխան դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի լուծումներ են, որոնք կախված են u և w պարամետրերից: Դիցուք $x(t)$ կետի շարժման հավասարումներն են՝

$$\dot{x} = f\left(x,u\right),\ \ x \in R^l,\ \ u \in U \subseteq R^k$$

սկզբնական x^0 պայմանով, իսկ $y(t)$ կետի շարժման հավասարումները՝

$$\dot{y} = g\left(y,w\right),\ \ y \in R^s,\ \ w \in W \subseteq R^m$$

սկզբնական y^0 պայմանով: Ինչպես և օպտիմալ կառավարման խնդիրներում, կետերի ֆազային տարածությունները կարող են չհամընկնել շարժման իրական տարածության հետ $(l \geq n,\ s \geq n)$: Այստեղ մենք կդիտարկենք լրիվ ինֆորմացիայով խաղերը, այսինքն այն դեպքը, երբ խաղացողները յուրաքանչյուր t պահին գիտեն $x(t)$ և $y(t)$ ֆազային կետերը: Խաղը սկսվում է $\left(x^0, y^0\right)$ սկզբնական դիրքից և յուրաքանչյուր t պահին $\left(x(t), y(t)\right)$ ֆազային կետում խաղացողները ընտրում են $u \in U$ և $w \in W$ կառավարումները:

Հետապնդման խաղերում շահույթի ֆունկցիաները կարող են տրվել տարբեր եղանակներով: Հիմնականում դիտարկվում են երկու տարբերակներ՝արագագործության խնդիր, երբ առաջին խաղացողը ձգտում է մինիմալ ժամանակում մոտեցնել իր կողմից կառավարվող $x(t)$ կետը երկրորդ խաղացողի կողմից կառավարվող $y(t)$ կետին նախորոք տրված l հեռավորության վրա, և ֆիքսած T ժամանակամիջոցով խնդիր, երբ շահույթի ֆունկցիան $\rho\left(x(T), y(T)\right)$ հեռավորությունն է:

Ֆորմալ տեսանկյունից ունենալ երկու կետ R^n-ում համարժեք է նրան, որ դիտարկվի մեկ կետ՝ $z \in R^{2n}$ տարածության մեջ, որը կառավարվում է երկու խաղացողների կողմից՝ $u \in U$ և $w \in W$ կառավարումներ ընտրելով:

Ընդհանուր դեպքում կասենք, որ տրված է *հակամարտ դիֆերենցիալ խաղ*, եթե տրված են.

1. $U \subseteq R^k$ և $W \subseteq R^m$ կառավարման տիրույթները,
2. $\dot{z} = f\left(z,u,w\right)$, $z \in R^n$, $f = \left(f_1, f_2, ..., f_n \right)$, $u \in U$, $w \in W$ շարժման հավասարումները,
3. Տերմինալ $\Sigma \subset R^n$ տիրույթը,
4. $H\left(u,w\right) = \int_0^T G\left(z\right)dt + h\left(s\right)$, $s \in \Sigma$ շահույթի ֆունկցիան:

Այս տեսքով սահմանված դիֆերենցիալ խաղն արտաքնապես նման է օպտիմալ կառավարման խնդրի մոդելին, սակայն կան նաև էական տարբերություններ: Նախ, քանի որ այս խաղը հակամարտ խաղ է, ուստի հարկավոր է սահմանել խաղացողների ստրատեգիաները, քանի որ կառավարումները բացի ժամանակից կախված են նաև ֆազային դիրքերից: Բացի այդ, հարկավոր են պայմաններ, որոնք կապահովեն հավասարակշռության իրավիճակի գոյությունը: Կան նաև այլ տեսական և տեխնիկական խնդիրներ, որոնք էականորեն բարդացնում են դիֆերենցիալ խաղերի ուսումնասիրությունը:

Հիմնական մոտեցումները նկարագրելու համար առայժմ ենթադրենք, որ խաղում գոյություն ունի հավասարակշռության իրավիճակ, գոյություն ունեն օպտիմալ կառավարումներ և համապատասխան հետագծեր, ընդ որում կառավարման U և W տիրույթները որոշվում են $a_i \le u_i \le b_i$, $i = 1, 2, ..., k$; $c_j \le w_j \le d_j$, $j = 1, 2, ..., m$ անհավասարություններով: Ինչպես նաև ենթադրենք, որ բոլոր ֆունկցիաները, որոնց հետ առնչվելու ենք այս բաժնում, անընդհատ ածանցելի են այնքան անգամ, որքան հարկավոր լինի: Սկզբնական $z \in R^n$ ֆազային կետում սկսվող խաղի արժեքը նշանակենք $V\left(z\right)$-ով:

Ենթադրենք, որ $t = 0$ պահին E խաղացողն ընտրում է $\bar{u} \in U$ կառավարումը, իսկ P խաղացողը՝ $\bar{w} \in W$ կառավարումը: Այս դեպքում բավականաչափ փոքր Δt

ժամանակամիջոցից հետո ֆազային փոփոխականները մոտավորապես հավասար կլինեն $z+\Delta z$, որտեղ՝

$$\Delta z_i = f_i\left(z,\bar{u},\bar{w}\right)\Delta t \;\;,\;\; i=1,2,...,n$$

և շահույթի ֆունկցիան հավասար կլինի՝

$$\int_0^{\Delta t} G\left(z_1,z_2,...z_n\right)dt \approx G\left(z_1,z_2,...z_n\right)\Delta t :$$

Խաղը վերսկսվում է $z+\Delta z$ կետից և, եթե Δt պահից օգտագործվում են օպտիմալ կառավարումները, ապա շահույթը հավասար կլինի՝

$$G\left(z_1,z_2,...z_n\right)\Delta t + V\left(z+\Delta z\right):$$

Քանի որ

$$V\left(z+\Delta z\right) \approx V\left(z\right) + \sum_{i=1}^{n} V_i\left(z\right)\Delta z_i \;,$$

որտեղ, ինչպես միշտ, V_i-ով նշանակել ենք $V\left(z_1,z_2,...,z_n\right)$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները ըստ z_i, $i=1,2,...,n$: Այստեղից,

$$V\left(z+\Delta z\right) \approx V\left(z\right) + \sum_{i=1}^{n} V_i\left(z\right) f_i\left(z,\bar{u},\bar{w}\right)\Delta t$$

Հետևաբար, ենթադրելով, որ $\bar{u}$-ն և $\bar{w}$-ն օպտիմալ կառավարումներն են $t=0$ պահին, $V\left(z\right)$ շահույթի ֆունկցիայի համար ստանում ենք

$$V\left(z\right) \approx G\left(z_1,z_2,...z_n\right)\Delta t + V\left(z\right) + \sum_{i=1}^{n} V_i\left(z\right) f_i\left(z,\bar{u},\bar{w}\right)\Delta t :$$

Ձգտեցնելով $\Delta t \to 0$, կստանանք *դիֆերենցիալ խաղերի հիմնական հավասարումը*՝

$$G\left(z_1,z_2,...z_n\right) + \sum_{i=1}^{n} V_i\left(z\right) f_i\left(z,\bar{u},\bar{w}\right) = 0 : \qquad (7.4.1)$$

Կամ, որը համարժեք է՝

$$\max_u \min_w \left\{ G\left(z_1, z_2, \dots z_n\right) + \sum_{i=1}^{n} V_i\left(z\right) f_i\left(z, u, w\right) \right\} = 0 : \tag{7.4.2}$$

Հիմնական հավասարումը ստանալուց հետո, ինչպես և օպտիմալ կառավարման խնդրում, կարող ենք ստանալ հետագծերի հավասարումները: Ածանցելով (7.4.1) հավասարումը ըստ z_i-ի (հաշվի առնելով, որ u և w կառավարումները կախված են z-ից) և հավասարեցնելով 0-ի, կստանանք՝

$$\frac{\partial}{\partial z_j}\left(\sum_{i=1}^{n} V_i\left(z\right) f_i\left(z, \bar{u}, \bar{w}\right) + G\left(z_1, z_2, \dots z_n\right) \right) = \sum_{i=1}^{n} V_i\left(z\right) \frac{\partial f_i\left(z, \bar{u}, \bar{w}\right)}{\partial z_j} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i\left(z\right)}{\partial z_j} f_i\left(z, \bar{u}, \bar{w}\right) +$$
$$+ \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial}{\partial u_l}\left(\sum_{i=1}^{n} V_i\left(z\right) f_i\left(z, \bar{u}, \bar{w}\right) + G\left(z\right) \right) \frac{\partial u_l}{\partial z_j} + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial}{\partial w_s}\left(\sum_{i=1}^{n} V_i\left(z\right) f_i\left(z, \bar{u}, \bar{w}\right) + G\left(z\right) \right) \frac{\partial w_s}{\partial z_j} +$$
$$+ \frac{\partial G\left(z_1, z_2, \dots z_n\right)}{\partial z_j} = 0, \; j = 1, 2, \dots, n$$

(7.4.3)

Այս գումարում՝ (համեմատել (7.2.8)-ի հետ)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i\left(z\right)}{\partial z_j} f_i\left(z, \bar{u}, \bar{w}\right) = \frac{dV_j}{dt} :$$

Այժմ դիտարկենք

$$\sum_{l=1}^{k} \frac{\partial}{\partial u_l}\left(\sum_{i=1}^{n} V_i\left(z\right) f_i\left(z, \bar{u}, \bar{w}\right) + G\left(z\right) \right) \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial z_j}$$

արտահայտությունը: Օպտիմալ կառավարման յուրաքանչյուր $\bar{u}_j$ բաղադրիչն իր արժեքը կարող է ընդունել $\left[a_j, b_j\right]$ հատվածի կամ ներքին կետում, կամ ծայրակետերից մեկում: Եթե այդ արժեքը ներքին կետում է, ապա՝

$$\frac{\partial}{\partial u_l}\left(\sum_{i=1}^{n} V_i\left(z\right) f_i\left(z, \bar{u}, \bar{w}\right) + G\left(z\right) \right) = 0 :$$

Իսկ եթե օպտիմալ արժեքը որոշման տիրույթի ծայրակետում է, ապա $\bar{u}_l$-ը հաստատուն է , հետևաբար, $\partial\bar{u}_l/\partial z_j = 0$: Այսպիսով, բոլոր դեպքերում՝

$$\sum_{l=1}^{k} \frac{\partial}{\partial u_l}\left(\sum_{i=1}^{n} V_i(z)\, f_i(z,\bar{u},\bar{w}) + G(z)\right)\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial z_j} = 0, \quad j = 1,2,\ldots,n:$$

Նույն դատողությունների համաձայն, նաև՝

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial}{\partial w_s}\left(\sum_{i=1}^{n} V_i(z)\, f_i(z,\bar{u},\bar{w}) + G(z)\right)\frac{\partial \bar{w}_s}{\partial z_j} = 0, \quad j = 1,2,\ldots,n:$$

Վերջնականապես, (7.4.3) հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{\partial}{\partial z_j}\left(\sum_{i=1}^{n} V_i(z)\, f_i(z,\bar{u},\bar{w}) + G(z_1,z_2,\ldots z_n)\right) = \sum_{i=1}^{n} V_i(z)\frac{\partial f_i(z,\bar{u},\bar{w})}{\partial z_j} + \frac{dV_j}{dt} + \frac{\partial G(z_1,z_2,\ldots z_n)}{\partial z_j} = 0,$$

Կամ՝

$$\dot{V}_j = -\sum_{i=1}^{n} V_i(z)\frac{\partial f_i(z,\bar{u},\bar{w})}{\partial z_j} - \frac{\partial G(z)}{\partial z_j}, \; j = 1,2,\ldots,n:$$

Այս հավասարումները

$$\dot{z}_j = f_j(z,\bar{u},\bar{w}), \quad j = 1,2,\ldots,n$$

հավասարումների հետ միասին անվանում են դիֆերենցիալ խաղի *հետագծի հավասարումներ:*

Օրինակ 7.4.1 (Խելագար վարորդ): Այս խաղում շարժումը տեղի է ունենում հարթության վրա: Վարորդը (P) ավտոմեքենայով փորձում է վրաերթի ենթարկել հետիոտնին (E): Ենթադրվում է, որ ավտոմեքենայի շարժումը սահմանափակված է պտտման մինիմալ r շառավիղով, իսկ հետիոտնը կարող յուրաքանչյուր պահին ընտրել ցանկացած ուղղություն: Պարզության համար ենթադրենք, որ խաղացողների արագությունները հաստատուն են՝ համապատասխանաբար a և b, $a < b$: Հետիոտնի կառավարումը շարժման ուղղությունն է՝ այդ պահին իր ուղղության վեկտորի և աբցիսների առանցքի միջև կազմած φ անկյունը: Ավտոմեքենայի կառավարումը՝ կորության R շառավիղի ընտրությունը: Այսպիսով, հետիոտնի շարժման հավասարումները կունենան հետևյալ տեսքը՝

$$\dot{x}_1 = a\cos\varphi,$$
$$\dot{x}_2 = a\sin\varphi:$$

Իսկ ավտոմեքենայի շարժման հավասարումները կազմելու համար կարող ենք օգտվել անկյունային արագության բանաձևից՝ $\dot{\theta} = b/R$՝

$$\dot{x}_3 = b\cos x_5,$$
$$\dot{x}_4 = b\sin x_5,$$
$$\dot{x}_5 = \frac{b}{R}:$$

Որտեղ x_5-ը մեքենայի ուղղության վեկտորի կազմած անկյունն է աբցիսների առանցքի հետ: Քանի որ կառավարման որոշման տիրույթը՝ $[r,+\infty)$ բազմությունը սահմանափակ չէ, ներմուծենք նոր կառավարում՝ $\phi = r/R$, և ենթադրենք, որ աջ ուղղությունը դրական է, ձախ ողղությունը բացասական: Այսպիսով, վարորդի կառավարման տիրույթը կընդունի հետևյալ տեսքը՝ $|\phi| \le 1$: Խաղի շարժման հավասարումները կլինեն՝

$$\dot{x}_1 = a\cos\varphi,$$
$$\dot{x}_2 = a\sin\varphi,$$

$$\dot{x}_3 = b\cos x_5,$$
$$\dot{x}_4 = b\sin x_5,$$
$$\dot{x}_5 = \frac{b\phi}{r}:$$

Այս խաղը դիտարկենք որպես արագագործության խաղ, այսինքն ենթադրենք, որ P-ն փորձում է հնարավորինս արագ բռնել E-ին, իսկ E-ն փորձում է հնարավորինս հետաձգել այդ պահը (հույս ունենալով օգնություն ստանալ):

Կազմենք այս խաղի հիմնական հավասարումը՝

$$\max_{\varphi}\min_{\phi}\left(V_1 a\cos\varphi+V_2 a\sin\varphi+V_3 b\cos x_5+V_4 b\sin x_5+V_5\frac{b\phi}{r}\right)=0:$$

Կամ՝

$$\max_{\varphi}\min_{\phi}\left(a\left(V_1\cos\varphi+V_2\sin\varphi\right)+b\left(V_3\cos x_5+V_4\sin x_5\right)+V_5\frac{b\phi}{r}\right)=0:$$

Այստեղ φ-ից կախված է միայն առաջին փակագիծը, իսկ ϕ-ից միայն վերջին գումարելին: Դժվար չէ ստուգել, որ օպտիմալ $\bar{\varphi}$ և $\bar{\phi}$ կառավարումները հետևյալն են՝

$$\cos\bar{\varphi}=\frac{V_1}{\sqrt{V_1^2+V_2^2}},\sin\bar{\varphi}=\frac{V_2}{\sqrt{V_1^2+V_2^2}};\bar{\phi}=\operatorname{sgn}V_5:$$

Այժմ կազմենք հետագծերի հավասարումները՝

$$\begin{aligned}
&\dot{V}_1=0,\\
&\dot{V}_2=0,\\
&\dot{V}_3=0,\\
&\dot{V}_4=0\\
&\dot{V}_5=b\left(V_3\cos x_5-V_4\sin x_5\right):
\end{aligned}$$

Օպտիմալ կառավարումների տեսքից երևում է, որ E–ի համար օպտիմալ կառավարումը հաստատուն է ($\bar{\varphi}=const$), իսկ P-ի օպտիմալ կառավարումը բաղկացած է լինելու աջ և ձախ հնարավորինս կտրուկ պտույտներից: Այսպիսով, չնայած մենք ենթադրել էինք, որ բոլոր դիտարկվող ֆունկցիաները պետք է բավականաչափ ողորկ լինեն, կառավարումը անընդհատ չէ և ընդհանուր դեպքում չենք կարող խոսել շարժման հավասարումների լուծման գոյության մասին: Այս թերությունները կարելի է վերացնել, դիտարկելով խաղացողների ստրատեգիաների նոր դաս:

Սահմանում 7.4.1. E խաղացողի $u(\cdot)$ կտոր առ կտոր ծրագրային ստրատեգիա անվանում են (σ,a) զույգը, որտեղ σ–ն $[0,+\infty)$ ժամանակահատվածի որևէ $0=t_0\le t_1\le\cdots\le t_k\le\cdots$ տրոհում է վերջավոր կուտակման կետեր չունեցող t_k կետերով, իսկ a-ն արտապատկերում է, որը յուրաքանչյուր t_k կետին և $z(t_k)$ ֆազային դիրքին համապատասխանության մեջ է դնում $[t_k, t_{k+1})$ միջակայքում որոշված չափելի $u^k(t)$ ֆունկցիա: Նույն կերպ, P խաղացողի $w(\cdot)$ կտոր առ կտոր ծրագրային ստրատեգիա անվանում են (δ, b) զույգը, որտեղ δ–ն $[0, +\infty)$ ժամանակահատվածի որևէ $0 = t'_0 \le t'_1 \le \cdots \le t'_k \le \cdots$ տրոհում է վերջավոր կուտակման կետեր չունեցող t'_k կետերով, իսկ b-ն արտապատկերում է, որը յուրաքանչյուր t'_k կետին և $z(t'_k)$ ֆազային դիրքին համապատասխանության մեջ է դնում $w^k(t)$ չափելի ֆունկցիա, որոշված $[t'_k, t'_{k+1})$ միջակայքում: Դիֆերենցիալ խաղերի տարբեր դասերի համար հավասարակշռության գոյության թեորեմներ բերված են [24]-ում:

ՀԱՎԵԼՎԱԾ

Օգտագործվող տերմինների և հասկացությունների վերաբերյալ տարակարծություններից խուսափելու նպատակով բերենք մի քանի հիմնական սահմանումներ և արդյունքներ (տես [12],[24]):

ԲԻՆԱՐ ՀԱՐԱԲԵՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Սահմանում: Տրված X բազմության կարգավորված զույգերի $R \subseteq X \times X$ ենթաբազմությունը անվանում են *բինար հարաբերություն*: Եթե $(x, y) \in R$, ապա ասում են, որ x տարրը բինար հարաբերության մեջ է y տարրի հետ և նշանակում են xRy: Ներկայացնենք հարաբերությունների մի քանի հատկություններ.

- R հարաբերությունն անվանում են *ռեֆլեքսիվ*, եթե ցանկացած $x \in X$ համար xRx:
- R հարաբերությունն անվանում են *հակառեֆլեքսիվ*, եթե xRy-ից հետևում է, որ $x \neq y$:
- R հարաբերությունն անվանում են *սիմետրիկ*, եթե xRy-ից հետևում է yRx:
- R հարաբերությունն անվանում են *հակասիմետրիկ,* եթե xRy, yRx-ից հետևում է, որ $x = y$:
- R հարաբերությունն անվանում են *տրանզիտիվ*, եթե $x\ R$, yRz-ից հետևում է, որ xRz:

Սահմանում: R հարաբերությունն անվանում են *թույլ կարգավորություն*, եթե այն ռեֆլեքսիվ, հակասիմետրիկ և տրանզիտիվ հարաբերություն է: R հարաբերությունն անվանում են *խիստ կարգավորություն*, եթե այն հակառեֆլեքսիվ և տրանզիտիվ հարաբերություն է: R հարաբերությունն անվանում են *համարժեքություն*, եթե այն ռեֆլեքսիվ, սիմետրիկ և տրանզիտիվ հարաբերություն է: X բազմությունն անվանում են *լիովին կամ գծայնորեն կարգավորված* R կարգավորությամբ, եթե ցանկացած երկու՝ $x, y \in X$ կետերի համար տեղի ունի կամ xRy, կամ yRx:

ՉԱՓԵԼԻ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

X բազմության ենթաբազմությունների S բազմությունն անվանում են բուլյան σ-հանրահաշիվ, կամ պարզապես σ*-հանրահաշիվ*, եթե

1. Ցանկացած $E \subseteq X, E \in S$ և $F \subseteq X, F \in S$ համար՝ $E \setminus F \in S$:
2. Ցանկացած հաշվելի թվով $E_i \subseteq X, E_i \in S; i = 1, 2, \ldots$ բազմությունների համար՝ $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in S$:
3. $X \in S$:

Բազմությունների վերաբերյալ հայտնի $E \bigcap F = (E \bigcup F) \setminus (E \setminus F) \setminus (F \setminus E)$ առնչությունից հետևում է, որ σ-հանրահաշիվը փակ է նաև հաշվելի հատման նկատմամբ, այսինքն, եթե $E_i \subseteq X, E_i \in S; i = 1, 2, \ldots,$ ապա՝ $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in S$: (X, S) զույգն անվանում են *չափելի տարածություն*, իսկ $E \subseteq X, E \in S$ բազմությունները՝ *չափելի բազմություններ*:

Իրական առանցքի վրա կիսաբաց միջակայքերով ($[a, b)$ տեսքի) ծնված σ-հանրահաշիվն անվանում են *բորելյան* σ*-հանրահաշիվ*: Հեշտությամբ ապացուցվում է, որ այն պարունակում է նաև իրական առանցքի բոլոր ինչպես բաց, այնպես էլ փակ բազմությունները:

(X, S) չափելի տարածության վրա որոշված իրականարժեք $f(x)$ ֆունկցիան անվանում են *չափելի ֆունկցիա*, եթե ցանկացած բորելյան բազմության նախապատկերը չափելի է, այսինքն, բորելյան ցանկացած B բազմության համար՝ $f^{-1}(B) \in S$:

Հավանականային չափ (X, S) չափելի տարածության վրա անվանում են S σ-հանրահաշվի վրա որոշված բազմության $\mu(E)$ ֆունկցիան, եթե այն բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

1. $\mu(E) \geq 0$ ցանկացած $E \in S$ համար:
2. ցանկացած $E \subseteq X$, $E \in S$ և $F \subseteq X$, $F \in S$, $E \cap F = \varnothing$ բազմությունների համար՝ $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$:
3. $\mu(\varnothing) = 0$, $\mu(X) = 1$:

(X,S) չափելի տարածության վրա որոշված $f(x)$ իրականարժեք ֆունկցիան անվանում են պարզ ֆունկցիա, եթե այն կարելի է ներկայացնել

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{E_i}(x)$$

տեսքով, որտեղ $\chi_{E_i}(x)$-ն E_i բազմության բնութագրիչ ֆունկցիան է՝

$$\chi_{E_i}(x)=\begin{cases}1, x\in E_i,\\ 0, x\notin E_i:\end{cases}$$

Պարզ ֆունկցիայի ինտեգրալ ըստ հավանականային μ չափի սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

$$\int f(x)d\mu=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(E_i):$$

(X,S) չափելի տարածության վրա որոշված իրականարժեք $f(x)$ ֆունկցիան անվանում են *ինտեգրելի ֆունկցիա* ըստ μ չափի, եթե գոյություն ունի պարզ $f_n(x)$ ֆունկցիաների միջինում ֆունդամենտալ հաջորդականություն, որը զուգամիտում է $f(x)$ ֆունկցիային ըստ μ չափի, այսինքն այնպիսի հաջորդականություն, որ՝

$$\lim_{n,m\to\infty}\int\left|f_n(x)-f_m(x)\right|d\mu=0,$$

և

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left\{x:\left|f_n(x)-f(x)\right|\geq\varepsilon\right\}=0$$

ինչպիսին էլ որ լինի $\varepsilon>0$ թիվը: Ինտեգրելի ֆունկցիայի ինտեգրալը ըստ չափի սահմանվում է որպես՝

$$\int f(x)d\mu=\lim_{n\to\infty}\int f_n(x)d\mu:$$

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] **Ավետիսյան Վ., Պողոսյան Մ.,** Վարիացիոն հաշիվ և օպտիմալ կառավարում, Երևան, 2008:

[2] **Թունիև Ա.Դ., Մովսիսյան Յու.Մ.,** Գծային հանրահաշվի և գծային ծրագրավորման մեթոդներ, Երևան, 2002:

[3] **Սահակյան Մ.Ա., Սարգսյան Հ.Լ., Սարգսյան Ա.Դ., Տոնոյան Ռ.Ն.,** Տնտեսության վերլուծության մաթեմատիկական եղանակներ, I հ., Երևան, 1997:

[4] **Սահակյան Մ.Ա., Սարգսյան Հ.Լ., Սարգսյան Ա.Դ., Տոնոյան Ռ.Ն.,** Տնտեսության վերլուծության մաթեմատիկական եղանակներ, II հ., Երևան, 2001:

[5] **Ашманов С.А.,** Линейное программирование, М., Наука, 1981.

[6] **Беллман Р.** Динамическое программирование, И*Л, М., 1960.

[7] **Болтянский В.Г.,** Математические методы оптимального управления, М., Наука,1969.

[8] **Воробьев Н.Н.,** Бескоалиционные игры, М., Наука, 1984.

[9] **Гихман И.И., Скороход А.В.,** Введение в теорию случайных процессов,М.,Наука,1965.

[10] **Зангвилл У.И.,** Нелинейное программирование, М., Сов.Радио, 1973.

[11] **Карманов В.Г.,** Математическое программирование, М., ФМЛ, 2004.

[12] **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.,** Элементы теории функций и функционального анализа, М., ФМЛ, 2004.

[13] **Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю.,** Дискретное программирование, М., Наука, 1969.

[14] **Мулен Э.,** Теория игр, М., Мир, 1985.

[15] **Никайдо**…Выпуклые..

[16] **Оуэн Г.,** Теория игр, М., Мир, 1971.

[17] **Партхасаратхи Т., Рагхаван Т.,**Некоторые вопросы теории игр двух лиц, М.,Мир,1974.

[18] **П етросян Л. И** и др., Теория игр, ИВШ, М., 1998

[19] **Позиционные игры,** сб., М., Наука, 1967.

[20] **Полиа Г., Сеге Г.,** Задачи и теоремы из анализа, М., ФМЛ, 1978.

[21] **Понтрягин Л.С.,** Обыкновенные диф. уравнения, М., Наука, 1965.

[22] **Розен В.В.**, Математические модели принятия решении в экономике, ИВШ, М., 2002.

[23] **Толстов Г.П.,** Мера и интеграл, М., Наука, 1976.

[24] **Халмош П.,** Теория меры, М., И*Л, 1953.

[25] **Schmidt C.**, Game Theory and Economic Analysys, NY, London, 2002.

[**26**] van **Brunt**, The Calculus of Variations, Springer-Verlag,2004.